Optimización de múltiples respuestas con la función de conveniencia

Julio César Ángel Gutiérrez

Ecos de Economía No. 19. Medellín, octubre de 2004, pp 147-159

Julio César Ángel Gutiérrez[1].

Resumen

La optimización de procesos es uno de los más grandes retos que enfrenta la industria manufacturera como estrategia para mejorar los niveles de productividad y competitividad en el mercado. La función de conveniencia (" Desirability Function") constituye una de las herramientas más utilizada en los últimos años para la optimización de procesos con múltiples respuestas o características de calidad, con especificaciones técnicas que indican los valores deseados o completamente inaceptables para cada respuesta.

En este trabajo se presentan casos en los cuales puede suponerse una relación lineal o no lineal entre las respuestas y la función de conveniencia global en función de las conveniencias individuales. Además, se presenta una aplicación importante a la metodología " six sigma" para el control de procesos industriales como herramienta para el logro un alto porcentaje de unidades conformes con las especificaciones técnicas.

Palabras claves: Optimización, Productividad, Función de conveniencia.

Abstract

The optimization of processes is one of the greatest challenges than it faces the manufacturing industry like strategy to improve the levels of productivity and competitiveness in the market. The convenience function ("Desirability Function") constitutes one of the tools more used in the last years for the optimization of processes with multiple answers or characteristics of quality, with engineering specifications that indicate the values wished or completely unacceptable for each answer. In this work cases appear in which a relation linear or nonlinear between the answers and the function of global convenience based on the individual conveniences can assume. In addition, an important application to the methodology appears "six sigma" for the industrial process control as tool for the profit a high percentage of units in agreement with the engineering specifications.

Key Words:

Optimization, productivity, desirability function.

Clasificación JEL: C61, C69

[1] Ingeniero Industrial. Profesor titular Universidad Eafit jangel@eafit.edu.co

Optimización de múltiples respuestas con la función de conveniencia

INTRODUCCIÓN

En la práctica industrial han sido muchos los métodos utilizados para el diseño y control de procesos industriales con el objetivo de establecer parámetros o condiciones de operación que proporcionen las características de calidad deseadas. En muchos casos se han utilizado el diseño experimental, las superficies de respuesta y la simulación como metodologías para identificar los valores de las variables de entrada que proporcionen un resultado deseable. No obstante, la función de conveniencia constituye una herramienta alternativa para el tratamiento de estos problemas, con la característica adicional de que mide la conveniencia, de manera análoga a una probabilidad, para cada característica individual y para todo el sistema de respuestas.

Para determinar las conveniencias individuales de las respuestas es necesario realizar experimentos que permitan establecer una relación funcional entre cada característica de calidad y los factores o causas que la modifican. Una vez establecida esta relación, se define la función de conveniencia individual de cada característica. Si un problema en particular contiene k características de calidad se obtendrá el mismo número de funciones de conveniencia que de manera conjunta establecerán la conveniencia total del sistema. La metodología considera casos de variación lineal y no lineal para las conveniencias individuales. Esta conveniencia total se calcula generalmente mediante la media geométrica de las conveniencias individuales o un sistema de ponderación adecuado.

Obtenida la función de conveniencia total se procede a su optimización para obtener las condiciones de operación controlables que la hacen máxima.

LA FUNCIÓN DE CONVENIENCIA

La función de conveniencia, escrita $d_i(Y_i)$, establece una relación funcional de la respuesta $\mathbf{Y_i}$ con los factores o condiciones de operación (x), de tal manera que su rango es el intervalo [0,1], proporcionando la mayor conveniencia cuando $\mathbf{d_i(Y_i) = 1}$ y la mínima conveniencia deseada (completamente indeseable) cuando $\mathbf{d_i(Y_i) = 0}$**.** En general, la conveniencia de cada respuesta debe ser mayor que cero como condición necesaria para establecer la conveniencia total de un sistema. En el intervalo [0,1], la conveniencia puede tener, según el caso, una variación lineal o no lineal, dependiendo de las condiciones propias del producto y del proceso, lo cual debe ser establecido por los expertos.

Si un proceso en particular tiene k respuestas de interés que deben ser controladas, la función de conveniencia total está dada por la media geométrica de las conveniencias individuales, como:

$$\mathbf{D = [\, d_1(Y_1)\, d_2(Y_2)\, d_3(Y_3) \ldots d_k(Y_k)]^{1/k}} \qquad (1)$$

Una vez obtenida la función de conveniencia total del sistema se procede a su optimización en función de los factores controlables o variables de entrada, en donde debe asegurarse que todas las conveniencias sean mayores a cero.

Derringer y Suich (1980) propusieron funciones de conveniencia según que cada una de las características quiera ser minimizada, maximizada o sujeta a un valor nominal. Si $\mathbf{I_i}$, $\mathbf{N_i}$ **y** $\mathbf{S_i}$ son los valores más bajo, nominal y más alto, respectivamente, las funciones de conveniencia están definidas de la siguiente manera.

a. Cuando es deseable que la respuesta se ajuste a un valor nominal N_i:

$$\mathbf{d_i\,(Y_i) = 0 \text{ si } Y_i\,(x) < I_i}$$
$$\mathbf{d_i\,(Y_i) = \{\, [Y_i\,(x) - I_i] / [N_i - I_i]\,\}^s \text{ si } I_i \le Y_i\,(x) \le N_i} \qquad (2)$$
$$\mathbf{d_i\,(Y_i) = \{\, [\, Y_i(x) - S_i\,] / [\, N_i - S_i\,]\,\}^t \text{ si } N_i \le Y_i(x) \le S_i}$$

$$\mathbf{d_i(Y_i) = 1 \text{ si } Y_i(x) > S_i}$$

b. Cuando la respuesta debe ser mayor que un valor dado, en cuyo caso el objetivo es maximizar:

$$\begin{aligned} &\mathbf{d_i(Y_i) = 0 \text{ si } Y_i(x) < I_i} \\ &\mathbf{d_i\,(Y_i) = \{[\,Y_i\,(x) - I_i\,] / [\,N_i - I_i\,]\,\}^s \text{ si } I_i \le Y_i\,(x) \le N_i} \\ &\mathbf{d_i\,(Y_i) = 1 \text{ si } Y_i\,(x) > N_i} \end{aligned} \qquad (3)$$

c. Cuando la respuesta debe ser menor que un valor dado, en cuyo caso el objetivo es minimizar:

$$\begin{aligned} &\mathbf{d_i\,(Y_i) = 1 \text{ si } Y_i\,(x) < N_i} \\ &\mathbf{di(Y_i) = \{[\,Y_i(x) - S_i\,] / [\,N_i - S_i\,]\,\}^s \text{ si } N_i \le Y_i\,(x) \le S_i} \\ &\mathbf{d_i\,(Y_i) = 0 \text{ si } Y_i(x) > S_i} \end{aligned} \qquad (4)$$

Los parámetros **s** y **t** determinan la forma de la función, de tal manera que si $\mathbf{s = t = 1}$ la función de conveniencia se incrementa linealmente; si $\mathbf{s < 1}$ **y** $\mathbf{t < 1}$ la función es convexa y si $\mathbf{s > 1}$ **y** $\mathbf{t > 1}$ la función es cóncava.

Cuando el objetivo corresponde a maximizar, el valor de $\mathbf{N_i}$ debe ser interpretado como un valor suficientemente grande para la respuesta; si el objetivo es minimizar, corresponde a un valor suficientemente pequeño.

Supóngase que se desea formular un producto con dos respuestas A y B de tal manera que la conveniencia se incremente linealmente hacia $\mathbf{N_i}$**,** esto es $\mathbf{s = t = 1}$**.** Supóngase, además, que la respuesta A con un valor menor de 4 puntos es indeseable $\mathbf{(I_i = 4)}$**,** mientras el valor más deseable es de 6 puntos $\mathbf{(N_i = 6)}$**.** Para la respuesta B un valor menor de 7 puntos es indeseable mientras el valor más deseable es de 9 puntos.

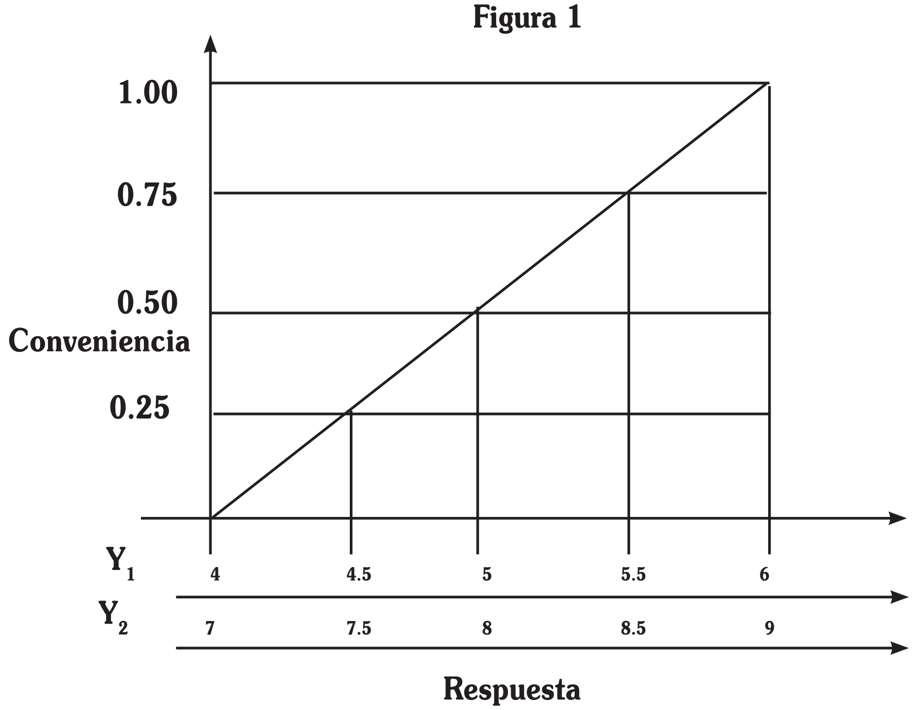
Para las dos respuestas, los valores de la función de conveniencia con el supuesto de maximizar la función objetivo están dados por $\mathbf{d_1(Y_i)}$ y $\mathbf{d_2(Y_i)}$**,** respectivamente:

$$\begin{aligned} &\mathbf{d_1(Y_i) = 0 \text{ si } Y_i(x) < 4} &\qquad &\mathbf{d_2(Y_i) = 0 \text{ si } Y_i(x) < 7} \\ &\mathbf{d_1(Y_i) = 1 \text{ si } Y_i(x) > 6} &\qquad &\mathbf{d_2(Y_i) = 1 \text{ si } Y_i(x) > 9} \end{aligned}$$

$\mathbf{d_1(Y_i) = (Y_i(x) - 4)/2 \text{ si } 4 \leq Y_i(x) \leq 6}$ $\mathbf{d_2(Y_i) = (Y_i(x) - 7) / 2 \text{ si } 7 \leq Y_i(x) \leq 9}$

Para este caso se ha supuesto un comportamiento lineal para las respuestas como se ilustra en la **figura 1**. En el eje horizontal se representan las respuestas y en el eje vertical los valores de la conveniencia para diferentes valores de las dos respuestas.

Figura 1



Obsérvese que las dos funciones de conveniencia tienen la misma pendiente porque el coeficiente de $\mathbf{Y_i(x)}$ es igual para ambas.

Otra alternativa para la función de conveniencia fue presentada por Harrington(1965), en la cual definió funciones para uno y dos límites de especificación.

Inicialmente calculó un valor de escala para la respuesta cuando se tienen dos límites de especificación (criterio bilateral), el cual está dado por:

$$\mathbf{Y'_i(x) = [2Y_i(x) - (S+I)] / (S-I)} \qquad (5)$$

Esta expresión representa una transformación de las respuestas $Y_i(x)$, de tal manera que

$\mathbf{Y'_i(x) = -1}$ si $\mathbf{Y_i(x) = I}$, y $\mathbf{Y'_i(x) = 1}$ si $\mathbf{Y_i(x) = S}$.

Cuando se trata de una característica bilateral, la función de conveniencia se calcula como:

$$\mathbf{d_i(Y_i(x)) = exp\ [- \left| Y'_i(x) \right|^n]} \qquad (6)$$

Donde **n** es un número positivo no necesariamente entero, que se obtiene a partir de condiciones iniciales o criterios de escala, especificando un valor de $\mathbf{Y'_i(x)}$ y su respectivo valor de conveniencia.

Para el caso unilateral la función de conveniencia individual está dada por:

$$\mathbf{D_i(Y_i(x)) = exp\ [- exp(- Y'_i(x))]} \qquad (7)$$

Para obtener la relación de escala $\mathbf{Y'_i(x)}$ es necesario que el investigador especifique dos puntos $\mathbf{(Y_{i1}, d_1)}$ **y** $\mathbf{(Y_{i2}, d_2)}$ en donde $\mathbf{Y_{i1} > Y_{i2}}$. A partir de estos puntos se realizan las transformaciones para obtener los criterios de escala para cada respuesta $\mathbf{Y_i(x)}$ **.**

Una vez obtenidas las conveniencias individuales de las respuestas, se calcula la conveniencia total mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{D(x) = [\ (d_1(Y_1(x))^{w1}(d_2(Y_2(x))^{w2}\ldots (d_m(Y_m(x))^{wm}]^{1/s}} \qquad (8)$$

Los valores de $\mathbf{w_i}$ representan las ponderaciones asignadas a cada función de conveniencia individual según la importancia de la característica y la suma de todas ellas es igual al índice de la raíz **(s)**.

En el rango [0,1], Harrington considera que un valor de 0.3 para la conveniencia es completamente inaceptable, mientras un valor de 1 significa que el mejoramiento adicional no tiene un valor apreciable.

Suponiendo que los límites de especificación superior e inferior para una respuesta A son respectivamente 6 y 4, y para otra característica de calidad B son 9 y 7, la función de Harrington para la respuesta A está dada por:

$$Y'_i(x) = -1 \text{ si } Y_i(x) = 4$$
$$Y'_i(x) = 1 \text{ si } Y_i(x) = 6$$
$$Y'_i(x) = Y_i(x) - 5 \text{ si } Y_i(x) \neq 4{,}6$$

Para la respuesta B la función está dada por:

$$Y'_i(x) = -1 \text{ si } Y_i(x) = 7$$
$$Y'_i(x) = 1 \text{ si } Y_i(x) = 9$$
$$Y'_i(x) = Y_i(x) - 8 \text{ si } Y_i(x) \neq 7{,}9$$

Las funciones de conveniencia para las dos respuestas A y B están dadas por:

$$d_1(Y_i(x)) = e^{-1} = 0.3678 \text{ si } Y_i(x) = 4 \qquad d_2(Y_i(x)) = e^{-1} = 0.3678 \text{ si } Y_i(x) = 7$$

$$d_1(Y_i(x)) = e^{-1} = 0.3678 \text{ si } Y_i(x) = 6 \qquad d_2(Y_i(x)) = e^{-1} = 0.3678 \text{ si } Y_i(x) = 9$$

$$d_1(Y_i(x)) = \exp(-|Y_i(x) - 5|^2 \text{ si } Y_i(x) \neq 4{,}6 \qquad d_2(Y_i(x)) = \exp(-|Y_i(x) - 8|^2 \text{ si } Y_i(x) \neq 7{,}9$$

Esta función es más adecuada en la mayor parte de los casos porque los valores de la conveniencia disminuyen en los extremos de la escala, lo cual significa la inconveniencia de tener valores por fuera de los límites de especificación.

Una vez obtenida la conveniencia global, se procede a encontrar el valor de los componentes que hacen máxima esta conveniencia global, para lo cual puede utilizarse el método símplex de programación lineal. Existen otros métodos para optimizar la conveniencia global pero no todos ellos garantizan la existencia de una solución única.

LA METODOLOGÍA " SIX SIGMA" Y LA FUNCIÓN DE CONVENIENCIA

Las aproximaciones propuestas por Harrington (1965), Derringer y Suich (1980) tienen en cuenta las especificaciones técnicas de las respuestas pero no hacen referencia a los parámetros básicos de un proceso. Por esta razón, Harry (1994) en la literatura "six sigma" adicionó a la función de conveniencia los parámetros μ_i y σ_i para identificar el centramiento y la dispersión inherentes a un proceso o producto.

Otra característica importante en esta metodología la constituye el hecho de considerar un desplazamiento $\tau_i\,\sigma_i$ de la media μ_i hacia los límites de especificación como estrategia para definir la conveniencia individual.

Si una característica de calidad **i**, tiene límites superior e inferior de especificación, **S** e **I** respectivamente, con una media asociada μ_i y desviación estándar σ_i y un posible desplazamiento de la media $\tau_i\,\sigma_i$, la función de conveniencia $\mathbf{d}_i(\mu_i,\sigma_i,\tau_i)$ está dada por:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{Min}\{\mathbf{N}[\mathbf{z}_s(\mu_i,\sigma_i,\tau_i)] - \mathbf{N}[\mathbf{z}_I(\mu_i,\sigma_i,\tau_i)],$$

$$\mathbf{N}[\mathbf{z}_s(\mu_i,\sigma_i,-\tau_i)] - \mathbf{N}[\mathbf{z}_I(\mu_i,\sigma_i,-\tau_i)]\} \quad (9)$$

Donde **N** es la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria normal y donde:

$$\mathbf{z}_S(\mu_i,\sigma_i,\mathbf{s}_i) = (\mathbf{1}/\sigma_i)\,[\mathbf{S} - (\mu_i + \tau_i\,\sigma_i)] \quad (10)$$

$$\mathbf{z}_I(\mu_i,\sigma_i,\mathbf{s}_i) = (\mathbf{1}/\sigma_i)\,[\mathbf{I} - (\mu_i + \tau_i\,\sigma_i)] \quad (11)$$

Cuando en algún caso no existan límites de especificación superior o inferior, los términos $\mathbf{N}[\mathbf{z}_s(\mu_i,\sigma_i,\tau_i)]$ y $\mathbf{N}[\mathbf{z}_I(\mu_i,\sigma_i,\tau_i)]$ se cambian por 1 y 0 respectivamente.

Desde otro punto de vista, la función de conveniencia puede ser interpretada como el valor del área mínima entre los límites de especificación, bajo distribuciones normales con medias del proceso $(\mu_i + \tau_i\,\sigma_i)$ y $(\mu_i - \tau_i\,\sigma_i)$ respectivamente.

Escrito de otra manera:

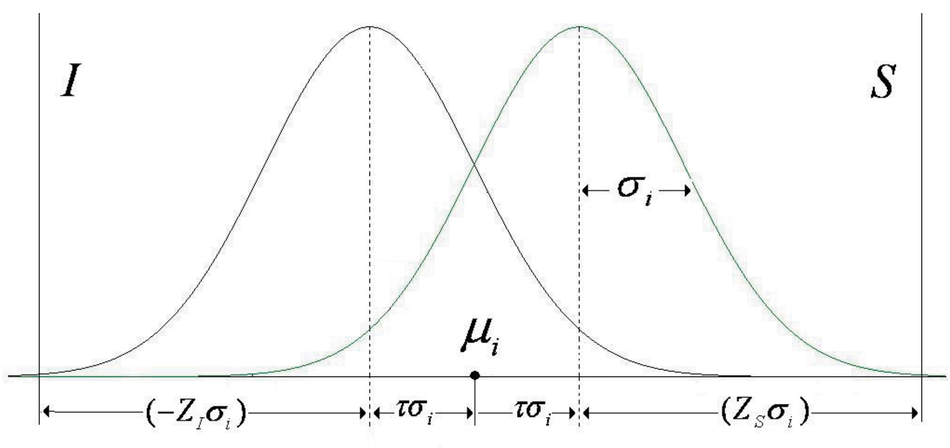
$$\mathbf{d_i}(\mu_i,\sigma_i,\tau_i) = \mathbf{Min}\{\mathbf{P}(\ \mathbf{I<=X <=S}) / \mu_i = (\mu_i+\tau_i\,\sigma_i)\ ,$$

$$\mathbf{P}(\ \mathbf{I<=X <=S}) / \mu_i = (\mu_i-\tau_i\,\sigma_i)\ \} \qquad (12)$$

De acuerdo con la definición anterior, la conveniencia está dada por el porcentaje de unidades que cumplen las especificaciones técnicas bajo el supuesto de que cada característica de calidad tiene un desplazamiento de la media hacia el límite de especificación más cercano. Los desplazamientos de la media pueden interpretarse como el beneficio de un desplazamiento positivo o negativo.

La relación entre los desplazamientos, los límites de especificación y el porcentaje de unidades que cumplen las especificaciones se muestran en la figura 2.

Figura 2



Una interpretación apropiada de la función de conveniencia fue dada por Harry (1994), la cual es de vital importancia cuando una característica de calidad no tiene especificaciones técnicas. Suponiendo un desplazamiento de τ_i desviaciones con respecto a la media, el autor define rangos para la conveniencia en los cuales se establece que:

- El mejoramiento no tiene valor apreciable (**6**σ_i)
- El nivel es bueno (**4**σ_i)
- El nivel es aceptable (**3**σ_i)
- El nivel es inaceptable (**2**σ_i)
- El nivel es completamente inaceptable (menos **2**σ_i)

La manera como se combinan las conveniencias individuales para obtener la conveniencia total ha sido propuesta por varios autores. Derringer y Suich (1980) consideran la conveniencia como un beneficio para **r** criterios y adicionan **m** características con valores asignados subjetivamente. De esta manera, la función de conveniencia total está dada por:

$$\mathbf{D(x)} = \{[\mathbf{d_1(Y_1(x))\ d_2(Y_2(x))\ldots\ d_r(Y_r(x))}]^{\mathbf{wr}}\ \mathbf{x}$$

$$[(\mathbf{d_{r+1}(Y_{r+1}(x))^{wr+1})(\ d_{r+2}(Y_{r+2}(x))^{wr+2}\ldots\ d_m(Y_m(x))^{wm}}\ ]\}^{\mathbf{1/S}} \qquad (13)$$

Donde $\mathbf{S} = \sum \mathbf{w_i}$ con $\mathbf{i = r, r+1 \ldots m}$.

La fórmula anterior es una medida del rendimiento del proceso bajo la suposición de que los cambios en la media ocurren simultáneamente y las fallas del proceso ocurren de manera independiente.

Otra alternativa para la conveniencia total fue dada por Kim y Lin (2001) cuando los criterios de calidad están altamente correlacionados, esto es, cuando al menos una de las respuestas está por fuera de los límites de especificación. En este caso, propusieron aplicar el criterio " maximin", donde la conveniencia total es el mínimo de las conveniencias individuales.

De igual manera se han planteado otras alternativas para la conveniencia global las cuales utilizan diferentes criterios de ponderación para las conveniencias individuales. Todas ellas constituyen un punto de partida para los estudios futuros sobre la materia.

CONCLUSIONES

Los métodos de optimización constituyen una de las más grandes preocupaciones para quienes tienen a su cargo la planeación, programación y control de procesos y productos industriales, no sólo por los costos que éstos implican, sino también por la capacidad competitiva de las empresas que compromete seriamente su existencia.

El método expuesto de la función de conveniencia constituye una de las herramientas modernas más importantes para la optimización de procesos y productos cuando se tiene más de una respuesta con valores especificados que se deben maximizar, minimizar o ajustarse a un valor nominal. Pero no debe pensarse en que basta con definir una conveniencia individual para cada respuesta con las fórmulas expuestas, sino que es necesario tener un conocimiento histórico del proceso que permita analizar con detalle los distintos factores de sensibilidad. Sólo la experiencia de quienes tienen a su cargo la producción puede garantizar el éxito en la aplicación de cualquier metodología.

El control de procesos ha sido realizado tradicionalmente mediante las gráficas estadísticas para control de variables y atributos (W. A. Shewhart, 1924), pero éstas nunca consideraron en su aplicación una medida de la favorabilidad o conveniencia de utilizar una ubicación específica para los límites de control como lo hace la metodología "Six Sigma" expuesta anteriormente. El concepto de conveniencia les adiciona una medida de control a los procesos y favorece el aseguramiento de la calidad para beneficio de productores y consumidores.

REFERENCIAS

BOX, M.J. and Draper. N.R. (1987) "*Empirical Model Building and Response Surfaces*". New York: Wiley.

CASTILLO, E.D. Montgomery, D.C. McCarville,D.R. (1996). " *Multiple Response Optimization*". Journal of Quality Technology. 28.3: july 1996.

RIBARDO, Ch. , Allen, T.T. and Schmitz, J. (2003). "*An alternative Desirability Function for Achieving "Six Sigma" Quality*". Publicación Internet, http://www.google.com.co: Desirability Function, 2004.

NÚÑEZ DE V. Margarita. (2002). " *Optimización de múltiples respuestas por el método de la función de conveniencia para un diseño de mezclas*". Investigación Operacional, Vol. 23, p.p. 83-89, La Habana, Cuba.

BENEDEK, J., Miner, T. (2001). "*Measuring Desirability: New Methods for evaluating desirability in a usability lab setting*". Microsoft Corporation, 1 Microsoft Way, Redmond, WA 98052.

DERRINGER, G.C. and Suich, R. (1980). "*Simultaneous optimization of several response variables",* J. Quality Thecnology*, 12, 214-219*.

HARRINGTON, E.C. (1965). "*The desirability function*", Ind. Quality Control 21, 494-498.

HARRY M. J. (1994) " *The vision of six sigma:* A roadmap for Breakthrough, Phoenix: sigma publishing Company.

KIM, K., Lin, D.K.J., (2001). " Simultaneous Optimization of Mechanical Properties of steel by maximizing Exponential Desirability Functions." Journal of the Royal Statistical Society: Series C.