Máquinas de Turing Paraconsistentes

Juan Carlos Agudelo Agudelo

Grupo de Lógica y Computación
Universidad EAFIT

5 de febrero de 2010

Contenido

Outline

1. Motivaciones
2. Definiciones preliminares
3. Máquinas de Turing paraconsistentes
4. Relaciones con Máquinas de Turing Cuánticas
5. Conclusiones

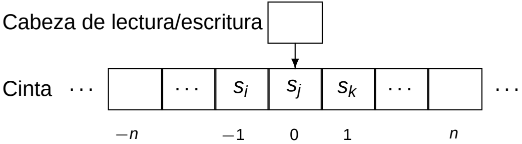
Motivaciones

- La complejidad algorítmica puede ser vista como siendo relativa a la lógica subyacente al modelo de computación?
- Nociones lógicas (en particular conceptos de la lógica paraconsistente) son útiles para fundamentar e interpretar la computación cuántica?

Outline

1. Motivaciones
2. Definiciones preliminares
3. Máquinas de Turing paraconsistentes
4. Relaciones con Máquinas de Turing Cuánticas
5. Conclusiones

Máquina de Turing



Cabeza de lectura/escritura

Cinta $\cdots$ | | $\cdots$ | s_i | s_j | s_k | $\cdots$ | | $\cdots$

$-n$ -1 0 1 n

- Instrucciones: (I) $q_i s_j s_k q_l$, (II) $q_i s_j R q_l$, (III) $q_i s_j L q_l$.
- Dos instrucciones son ambiguas se coinciden en los dos símbolos iniciales.
- Una máquina de Turing es determinista (MTD) si no tiene instrucciones ambiguas, en caso contrario es no-determinista (MTND).
- Las MTNDs son mas eficientes que las MTDs? (**P** $=$? **NP**)

Elementos de lógica

- Lenguaje: conectivos lógicos y reglas de formación de fórmulas.
- Relación de consecuencia: sea *For* un conjunto de fórmulas de un lenguaje. Una relación de consecuencia $\Vdash$ es cualquier subconjunto de $\wp(For) \times For$ ($\Gamma \Vdash \alpha$ indica que α es una consecuencia de Γ, donde Γ es un conjunto de fórmulas y α es una fórmula).
- Lógica: estructura $\langle For, \Vdash \rangle$, donde *For* es un conjunto de fórmulas y $\Vdash$ es una relación de consecuencia sobre *For*.
- La relación de consecuencia puede ser especificada sintácticamente (estableciendo reglas de manipulación simbólica) o semánticamente (interpretando los símbolos del lenguaje y estableciendo condiciones de verdad).

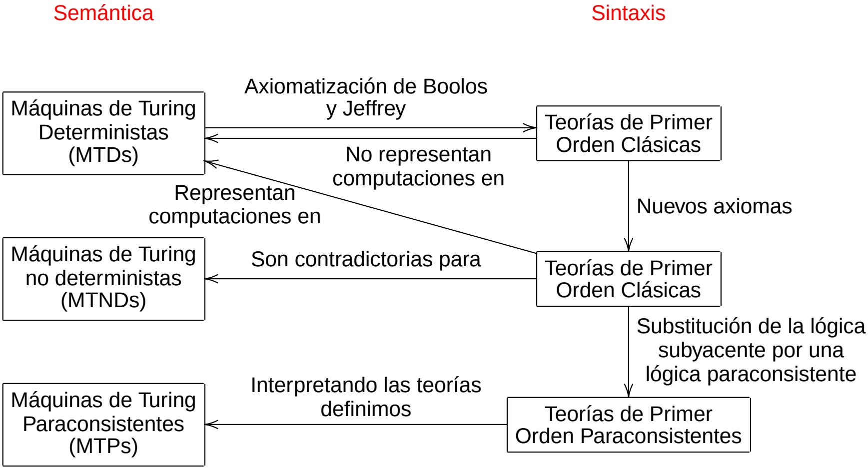
Lógica paraconsistente

- Teoría: cualquier conjunto $\Gamma \subseteq For$.
- Teoría contradictoria: sea Γ una teoría de una lógica con operador de negación $\neg$, Γ es *contradictoria* si existe una fórmula α tal que $\Gamma \Vdash \alpha$ e $\Gamma \Vdash \neg\alpha$.
- Teoría trivial: una teoría Γ es trivial si $\Gamma \Vdash \alpha$ para toda fórmula α.
- En la lógica clásica toda teoría contradictoria es trivial.
- Las lógicas paraconsistentes son definidas como lógicas que soportan contradicciones, es decir, son lógicas que permiten teorías contradictorias, mas no triviales.

Outline

1. Motivaciones
2. Definiciones preliminares
3. Máquinas de Turing paraconsistentes
4. Relaciones con Máquinas de Turing Cuánticas
5. Conclusiones

Máquinas de Turing Paraconsistentes



Semántica

Sintaxis

Máquinas de Turing Deterministas (MTDs)

Axiomatización de Boolos y Jeffrey

Teorías de Primer Orden Clásicas

No representan computaciones en

Representan computaciones en

Nuevos axiomas

Máquinas de Turing no deterministas (MTNDs)

Son contradictorias para

Teorías de Primer Orden Clásicas

Substitución de la lógica subyacente por una lógica paraconsistente

Máquinas de Turing Paraconsistentes (MTPs)

Interpretando las teorías definimos

Teorías de Primer Orden Paraconsistentes

Axiomatización de Boolos y Jeffrey

Lenguaje: $\mathcal{L} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}, <, ', 0\}$.

Interpretación intensional $\mathcal{I}$: las variables son interpretadas en números enteros.

- $Q_i(t, x)$: la máquina se encuentra en el estado q_i, en el tempo t y la posición x;
- $S_j(t, x)$: la máquina tiene el símbolo s_j en la posición x, en el tempo t;
- $<$: relación “menor que” en los números enteros;
- $'$: función “sucesor”;
- 0: el número 0.

Axiomatización de Boolos y Jeffrey

Teorías $\Delta_{LPC}(\mathcal{M}(\alpha))$:

- Axiomas para establecer las propriedades de $<$ y $'$.
- Un axioma especificando cada instrucción i_j de $\mathcal{M}$.
  Ejemplo ($i_1 = q_1 s_0 s_1 q_2$):

$$\forall t \forall x \left(\left(Q_1(t,x) \wedge S_0(t,x) \right) \to \left(Q_2(t',x) \wedge S_1(t',x) \wedge \forall y \left((y \neq x) \to ((S_0(t,y) \to S_0(t',y)) \wedge (S_1(t,y) \to S_1(t',y))) \right) \right) \right).$$

- Un axioma para especificar la situación inicial de $\mathcal{M}$.
  Ejemplo (entrada $\alpha = s_1 s_1$):

$$Q_1(0,0) \wedge \left(S_1(0,0) \wedge S_1(0,0')\right) \wedge \forall y \left((y \neq 0 \wedge y \neq 0') \to S_0(0,y)\right).$$

NO representan completamente la computación de $\mathcal{M}(\alpha)$.

Teorías extendidas

Teorías $\Delta^{\star}_{LPC}(\mathcal{M}(n))$:

- Un axioma para establecer la configuración de $\mathcal{M}(\alpha)$ antes de comenzar la computación.
- Un axioma para establecer la configuración de $\mathcal{M}(\alpha)$ después de terminar la computación (si la computación termina).
- Un axioma por cada símbolo de estado q_i de $\mathcal{M}$, para establecer la unicidad de estado e posición de la máquina en todo instante de tiempo.
- Un axioma por cada símbolo de lectura/escritura de $\mathcal{M}$, para establecer la unicidad de símbolos en cada posición de la máquina en todo instante de tiempo.

Representan completamente la computación de $\mathcal{M}(\alpha)$.
Son contradictorias cuando $\mathcal{M}$ **es una MTND**.

Máquinas de Turing Paraconsistentes

Primer modelo de MTPs: definido a través de la lógica $LFI1^*$, una lógica paraconsistente de primer orden en la jerarquía de Lógicas de la Inconsistencia Formal (LFIs).

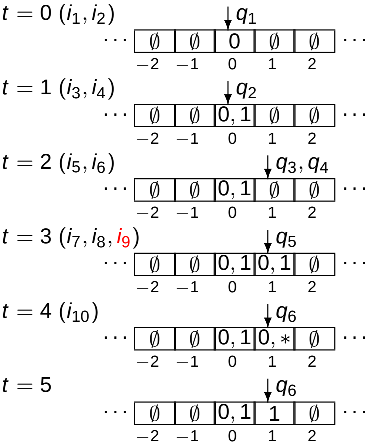
Definición

Una MTP es una MTND tal que:

- Las instrucciones ambiguas son ejecutadas simultáneamente, generando multiplicidad de símbolos en celdas de la cinta, y multiplicidad de estados o posiciones de la máquina.
- Permite adicionar condiciones de inconsistencia (o multiplicidad) en los primeros dos símbolos de la instrucción.
- Puede producir múltiples resultados.

Ejemplo de MTP

Sea $\mathcal{M}$ una MTP con instrucciones: i_1: $q_1 0 0 q_2$, i_2: $q_1 0 1 q_2$, i_3: $q_2 0 R q_3$, i_4: $q_2 1 R q_4$, i_5: $q_3 \emptyset 0 q_5$, i_6: $q_4 \emptyset 1 q_5$, i_7: $q_5 0 0 q_6$, i_8: $q_5 1 0 q_6$, i_9: $q_5 0^{\bullet} * q_6$ y i_{10}: $q_6 * 1 q_6$.



Poder computacional de las MTPs

Definición

Sea $\mathcal{M}$ una MTP. $\mathcal{M}$ acepta (resp. rechaza) $\alpha \in \Sigma^*$ se $\mathcal{M}(\alpha)$ se detiene y por lo menos $\frac{2}{3}$ de las configuraciones finales queda en estado q_s (resp. q_n).
Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje. $\mathcal{M}$ decide L si, para todo $\alpha \in \Sigma^*$, $\mathcal{M}$ acepta α si $\alpha \in L$ o $\mathcal{M}$ rechaza α en caso contrario.

Definición

BParP = {L | existe una MTP que decide L en tiempo polinomial}.

Teorema

BParP = ***P***.

Máquinas de Turing Paraconsistentes no Separables

Segundo modelo de MTPs (MTPNSs): definido usando un fragmento de la lógica modal $S5$, con negación paraconsistente ($\neg_{\Diamond} A \overset{\text{def}}{=} \Diamond \neg A$) y conjunción no separable ($A \wedge_{\Diamond} B \overset{\text{def}}{=} \Diamond(A \wedge B)$).

Definición

Una MTPNS es una MTND tal que:

- cuando alcanza una configuración ambigua, con n posibles instrucciones a ser ejecutadas, la máquina se divide en n copias, ejecutando una instrucción diferente en cada copia.
- Permite adicionar condiciones de inconsistencia.
- Puede producir múltiples resultados.

Poder computacional de las MTPNSs

Definición

BPNSP $=\{L \mid$ existe una MTPNS que decide L y termina en tiempo

$$f(c) = c^k, \text{ para alguma constante } k \in \mathbb{N}\}.$$

Teorema

NP $\subseteq$ ***BPNSP***.

BParP $=$ **P** $\subset?$ **NP** $\subset?$ **BPNSP**

Outline

1. Motivaciones
2. Definiciones preliminares
3. Máquinas de Turing paraconsistentes
4. Relaciones con Máquinas de Turing Cuánticas
5. Conclusiones

Máquinas de Turing Cuánticas

Una Máquinas de Turing Cuántica (MTC) is definida considerando los elementos de una MT como siendo observables de un sistema cuántico:

- Una MTC puede estar en un estado superpuesto (en múltiples configuraciones clásicas simultáneamente).
- Las operaciones son definidas a través de operadores unitarios. Los operadores unitarios son lineales, lo que permite procesamiento en paralelo (paralelismo cuántico).
- Al final de la computación debe ser realizada una medida, obteniendo como resultado un único elemento de la superposición.
- En el proceso de computación, la interferencia cuántica incrementa o decrementa las probabilidades de obtener una cierta configuración.

Relaciones entre MTPs y MTCs

- Toda configuración de una MTP puede ser vista como una superposición uniforme de configuraciones de una MT clásica: estados superpuestos corresponden a estados contradictorios.
- Las MTPs no permiten una representación directa de Estados enredados (ej. $|\,\psi\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,0,0\,\rangle + |\,1,1\,\rangle)$).
- Las MTPs no permiten una representación directa de la noción de *fase relativa*, por lo tanto, no permiten representar la interferencia cuántica (las condiciones de inconsistencia en las MTPs son un mecanismo diferente a la interferencia cuántica).

Problema de Deutsch

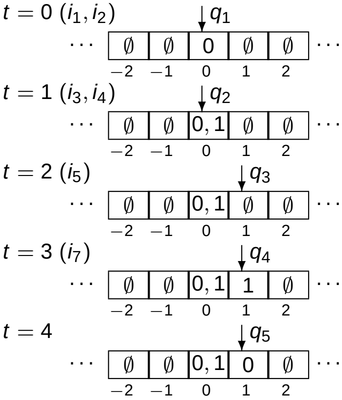
Problema de Deutsch: dada una función $f\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$ determinar si f es constante o balanceada consultando solamente una vez un 'oráculo' que computa f.

Solución cuántica:

- generación de un estado superpuesto,
- aplicación de un oráculo cuántico U_f para calcular $f(x)$ simultáneamente sobre todos los valores x,
- aplicación de una transformación de tal manera que la interferencia cuántica produce un estado donde la probabilidad de obtener el resultado correcto es 1.

Solución del problema de Deutsch a través de MTPs

Solución a través de MTPs (para $f(0) = f(1) = 1$): sea $\mathcal{M}$ una MTP con instrucciones: $i_1 : q_1 00 q_2$, $i_2 : q_1 01 q_2$, $i_3 : q_2 0 R q_3$, $i_4 : q_2 1 R q_3$, $i_5 : q_3 \emptyset 1 q_4$, $i_6 : q_4 00 q_5$, $i_7 : q_4 10 q_5$, $i_8 : q_4 1^{\bullet} * q_5$, $i_9 : q_5 * 1 q_5$.



Solución del problema de Deutsch a través de MTPs

- Instrucciones i_1 y i_2 simulan la generación del estado superpuesto.
- Instrucciones i_3 a i_5 computan la función constante 1 sobre el estado superpuesto, calculando $f(0)$ y $f(1)$ en paralelo y escribiendo el resultado en la posición 1 (pueden ser consideradas como el oráculo, que puede ser cambiado por otro).
- Instrucciones i_6 a i_9 chequean si f es constante ($f(0) = f(1)$) o balanceada ($f(0) = f(1)$), usando una instrucción con condición de inconsistencia (i_8), escribiendo 0 en la posición 1 si f es constante o 1 en caso contrario (sustituyendo la interferencia cuántica).

Relaciones entre MTPNSs y MTCs

- MTPNSs permiten representar estados enredados uniformes:
  - Considere $|\,\psi\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\,0,0\,\rangle + |\,1,1\,\rangle)$ representando los símbolos en las posiciones 0 y 1 de una MTC $\mathcal{M}$.
  - El estado de $\mathcal{M}$ es equivalente a el estado de una MTPNS $\mathcal{M}'$ dividida en dos copias: una con 0 en las posiciones 0 y 1 y otra con 1 en las posiciones 0 y 1.
  - La teoría $\Delta^{\star}_{S5}(\mathcal{M}'(\alpha))$ puede deducir $S_0(\bar{t},0) \wedge_{\diamond} S_0(\bar{t},1)$ y $S_1(\bar{t},0) \wedge_{\diamond} S_1(\bar{t},1)$, y no deducir $S_0(\bar{t},0) \wedge_{\diamond} S_1(\bar{t},1)$ ni $S_1(\bar{t},0) \wedge_{\diamond} S_0(\bar{t},1)$. Consecuentemente, estados enredados corresponden a conjunciones no separables.
- Las MTPNSs tampoco permiten una representación directa de la noción de *fase relativa*, por lo tanto, no permiten representar la interferencia cuántica (las condiciones de inconsistencia en las MTPNSs parecen ser un mecanismo mas potente que la interferencia cuántica).

Outline

1 Motivaciones

2 Definiciones preliminares

3 Máquinas de Turing paraconsistentes

4 Relaciones con Máquinas de Turing Cuánticas

5 **Conclusiones**

Conclusiones

- A través de la definición de modelos de máquinas de Turing paraconsistentes, y analizando sus características, se muestran evidencias de que la complejidad algorítmica puede ser vista como relativa a la lógica subyacente al modelo de computación.
- Son propuestas nociones lógicas para interpretar conceptos cuánticos: estados superpuestos corresponden a estados inconsistentes y estados enredados están relacionados con conjunciones no separables.
- Los modelos de computación paraconsistentes propuestos aquí no permiten una representación total de la computación cuántica, sin embargo, parece abrir un camino promisorio para entender las verdaderas capacidades de la computación cuántica.