Consistencia de la Aritmética

Andrés Felipe Velásquez Trujillo
Tutor: Juan Carlos Agudelo Agudelo

Universidad de Antioquia – UdeA

September 21, 2019

Contenido

Idea General

PA $\qquad$ HA $\qquad$ ST

PA: Aritmética de Peano
HA: Aritmética de Heyting
ST: Sistema T

Aritmética de Peano (PA)

Es una teoría de primer orden junto con los siguientes axiomas[2]

Axiomas de Peano

1. $\forall a(a = a)$
2. $\forall a \forall b(a = b \Rightarrow b = a)$
3. $\forall a \forall b \forall c(a = b \Rightarrow b = c \Rightarrow a = c)$
4. $\forall a \forall b(a = b \Rightarrow Sa = Sb)$
5. $\forall a \forall b(Sa = Sb \Rightarrow a = b)$
6. $\forall a(Sa = 0 \Rightarrow \bot)$
7. $\forall a(a + 0 = a)$
8. $\forall a \forall b(a + Sb = S(a + b))$
9. $\forall a(a * 0 = 0)$
10. $\forall a \forall b(a * Sb = (a * b) + a)$
11. $\forall a(\varphi(a) \Rightarrow \varphi(Sa)) \Rightarrow \varphi(0) \Rightarrow \forall a \varphi(a)$

Aritmética de Heyting (HA)

Es una teoría intuicionista o también conocida como constructivista que difiere de PA en que la lógica cambia. Mientras que PA se basa en lógica clásica, HA se basa en lógica intuicionista.

En la lógica intuicionista por ejemplo no es válido el tercero excluido, pero se conserva de la lógica clásica el principio de explosión.

Traducción de Doble Negación

Fue introducida por Kurt Gödel y es la encargada de reducir la aritmética clásica (PA) a la aritmética intuicionista (HA)[1]

Doble Negación:

1. $\varphi^N = \neg\neg\varphi$
2. $(\varphi \wedge \psi)^N = \varphi^N \wedge \psi^N$
3. $(\varphi \vee \psi)^N = \neg(\neg\varphi^N \wedge \neg\psi^N)$
4. $(\varphi \rightarrow \psi)^N = \varphi^N \rightarrow \psi^N$
5. $(\forall x \varphi(x))^N = \forall x \varphi(x)^N$
6. $(\exists \varphi(x))^N = \neg\forall x \neg\varphi(x)^N$

Teorema [1, Teorema 2.1.1]

Suponga que un conjunto de axiomas S prueba una fórmula φ usando lógica clásica. Entonces S^N prueba φ^N usando lógica intuicionista.

Corolario [1, Corolario 2.1.2]

Suponga que PA prueba una fórmula φ. Entonces HA prueba φ^N.

Corolario [1]

Si HA no prueba $\perp$ entonces PA no prueba $\perp$.

Teoría de Tipos

Bertrand Russell propone la teoría (ramificada) de tipos para dar solución a la paradoja de Russell.

$$A = \{X / X \notin X\}$$

Nota:

Las teorías de tipos crean una jerarquía en los objetos matemáticos, por lo que un objeto del mismo tipo que otro no le puede pertenecer a este.

λ-cálculo

Es un sistema formal diseñado para investigar la definición de función, y la notación de aplicación de funciones. Fue introducido por Alonzo Church y Stephen Kleene en la década de 1930. Dicho cálculo tiene una gran influencia sobre los lenguajes funcionales.

Notación y reglas

1. **Abstracción:** Dada una expresión M y una variable x construimos $\lambda x.M$.
2. **Aplicación:** Dadas expresiones M y N construimos MN.
3. β-**reducción:** Una expresión de la forma $(\lambda x.M)N$ puede reescribirse por la expresión $M[x := N]$ y esto es reemplazar cada ocurrencia libre de x en M por N.

Conjunto de todos los λ-términos, Λ

Definimos el conjunto de todos los λ-términos por:

$$\Lambda = V|(\Lambda\Lambda)|\lambda V.\Lambda$$

donde $V = \{x, y, z, ...\}$.

λ-cálculo simplemente tipado, $\lambda \rightarrow$

Es una teoría de tipos basada en el λ-cálculo con un único constructor de tipos $\rightarrow$, que construye tipos función. Fue intriducido por Alonzo Church en 1940 como un intento de evitar la aparición de paradojas en el λ-cáculo sin tipos.

Conjunto de todos los tipos simples, T

Sea $V = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ un conjunto infinito de variables de tipo.

1. **Variables de tipo:** si $\alpha \in V$, entonces $\alpha \in T$.
2. **Tipo Flecha:** si $\sigma, \gamma \in T$, entonces $(\sigma \rightarrow \gamma) \in T$.

Definimos el conjunto de todos los tipos simples por:

$$T = V | T \rightarrow T$$

Reglas de asignación de tipos

(Var)

$$\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau$$

(Abs)

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x\, M) : \sigma \to \tau}$$

(App)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau}$$

Extensión de $\lambda \rightarrow$, $\lambda \rightarrow_{\wedge}$

Términos de $\lambda \rightarrow_{\wedge}$

Definimos el conjunto de todos los términos por

$$\wedge = V | \wedge \wedge | \lambda . V \ \wedge | \langle \wedge , \wedge \rangle | \pi_1 (\langle \wedge , \wedge \rangle) | \pi_2 (\langle \wedge , \wedge \rangle)$$

donde $V = \{x, y, z, ...\}$

Tipos de $\lambda \rightarrow_{\wedge}$

Definimos el conjunto de todos los tipos por

$$\mathsf{T} = V_{\mathsf{T}} | \mathsf{T} \rightarrow \mathsf{T} | \ \mathsf{T} \wedge \mathsf{T}$$

donde $V_{\mathsf{T}} = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$

Reglas de asignación de tipos

$$\frac{\Gamma \vdash M : \psi \qquad \Gamma \vdash N : \varphi}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \psi \wedge \varphi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \psi \wedge \varphi}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \psi \wedge \varphi}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \varphi}$$

Nota

Las reglas de reducción de $\lambda \to_{\wedge}$ son las ordinarias β-reglas del cálculo lambda simplemente tipado junto con:

$$\pi_1(\langle M_1, M_2 \rangle) \to_\beta M_1$$

$$\pi_2(\langle M_1, M_2 \rangle) \to_\beta M_2$$

Sistema T

El sistema T es una extensión de $\lambda \rightarrow_{\wedge}$ agregándole un apropiado esquema de recursión. Este sistema fue concebido y utilizado por Gödel para probar la consistencia de la aritmética.

Tipos del Sistema T [2]

Son definidos por la gramática:

$$\gamma ::= int|\gamma \rightarrow \gamma|\gamma \wedge \gamma$$

Términos del Sistema T

Los términos son los de $\lambda \rightarrow_{\wedge}$, con la adición de nuevas constantes 0, s y R_{σ}.

Axiomas del Sistema T [2]

$\vdash 0 : int$

$\vdash s : int \to int$

$\vdash R_\sigma : (int \to \sigma \to \sigma) \to \sigma \to int \to \sigma$

Nota:

Las reglas de reducción del sistema T son las β-reglas de $\lambda \to_\wedge$ junto con

$$R_\sigma MN0 \to_\beta N;$$

$$R_\sigma MN(sP) \to_\beta MP(R_\sigma MNP).$$

Teorema [2, Teorema 10.3.8]

El sistema T satisface normalización fuerte.

Interpretación de HA en el Sistema T

Fue introducida por Kurt Gödel y es la encargada de reducir la aritmética intuicionista (HA) al sistema T.

Definición: [2, Definición 10.4.1]

Extendemos el conjunto de tipos del sistema T por una constante $\mathbb{1}$ y asumimos que $i : \mathbb{1}$, donde i es otra constante. Para cada tipo σ sobre nuestro lenguaje extendido, definimos un tipo $|\sigma|$, el cual es libre de $\mathbb{1}$ o igual a $\mathbb{1}$.

El tipo $|\sigma|$ es la forma normal de σ con respecto a las siguientes reglas:

$$\tau \wedge \mathbb{1} \Rightarrow \tau$$

$$\mathbb{1} \wedge \tau \Rightarrow \tau$$

$$\tau \to \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1}$$

$$\mathbb{1} \to \tau \Rightarrow \tau$$

Para M de tipo $|\tau_1 \wedge \tau_2|$ definimos

$$\pi_i(M) = \begin{cases} \pi_i(M), & si \quad |\tau_1|, |\tau_2| \neq \mathbb{1}; \\ i, & si \quad |\tau_i| = \mathbb{1}; \\ M, & si \quad |\tau_i| \neq \mathbb{1}, |\tau_{3-i}| = \mathbb{1}. \end{cases}$$

Para M de tipo $|\tau_1 \to \tau_2|$ y N de tipo $|\tau_1|$ definimos

$$(MN) = \begin{cases} MN, & si \quad |\tau_1|, |\tau_2| \neq \mathbb{1}; \\ i, & si \quad |\tau_2| = \mathbb{1}; \\ M & si \quad |\tau_1| = \mathbb{1}, |\tau_2| \neq \mathbb{1}. \end{cases}$$

Mapeo $\flat$: de fórmulas de HA a tipos del sistema T

1. $\flat(\bot) = \mathbb{1}$
2. $\flat(s = t) = \mathbb{1}$
3. $\flat(\exists a\varphi) = |int \wedge \flat a(\varphi)|$
4. $\flat(\forall a\varphi) = |int \to \flat a(\varphi)|$
5. $\flat(\varphi \wedge \psi) = |\flat(\varphi) \wedge \flat(\psi)|$
6. $\flat(\varphi \to \psi) = |\flat(\varphi) \to \flat(\psi)|$

Las siguientes condiciones describen todos los posibles casos cuando un término M de tipo $\flat(\varphi)$ *m-realiza* una fórmula φ.

Definición [2]

- $i : \mathbb{1}$ *m-realiza* $t = s$ si y sólo si t y s reescriben al mismo numeral.
- $M : |int \wedge \flat(\psi)|$ *m-realiza* $\exists a\psi$ si y sólo si $\pi_1(M) =_T \bar{n}$, para algún n, y $\pi_2(M)$ *m-realiza* $\psi[a := \underline{n}]$.
- $M : |int \to \flat(\psi)|$ *m-realiza* $\forall a\psi$ si y sólo si $M\bar{n}$ *m-realiza* $\psi[a := \underline{n}]$, para todo n.
- $M : |\flat(\varphi) \wedge \flat(\psi)|$ *m-realiza* $\varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\pi_1(M)$ *m-realiza* φ y $\pi_2(M)$ *m-realiza* ψ.
- $M : |\flat(\varphi) \to \flat(\psi)|$ *m-realiza* $\varphi \to \psi$ si y sólo si MN *m-realiza* ψ siempre que N *m-realiza* φ.
- Ningún término *m-realiza* $\bot$.

Teorema[2]

Toda fórmula demostrable de HA es m-realizable.

Referencias

Jeremy Avigad and Solomon Feferman. *Gödel's Functional (" Dialectica") Interpretation. Handbook of Proof Theory, SR Buss*. 1998.

Morten Heine Sørensen and Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard isomorphism*. Vol. 149. Elsevier, 2006.