Semántica topológica para la lógica intuicionista

Santiago Echeverri Valencia

Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia - UdeA
Medellín - Colombia

November 7, 2019

Outline

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Outline

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Sintaxis

Las fórmulas de la lógica proposicional intuicionista son construidas en la manera estandar, a partir de un conjunto de letras o variables proposicionales y una constante $\perp$ "bottom" por medio de conectivos lógicos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$. Los símbolos p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, ... tomados de un conjunto Φ, representan variables proposicionales. Los símbolos α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, ... representan fórmulas.
Otros conectivos y la constante $\top$ "top" se definen como:

$$\neg\alpha := \alpha \rightarrow \perp, \ \top := \neg\perp, \ p \leftrightarrow q := (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Se presenta la notación de secuente:

$$\Gamma \Rightarrow \alpha$$

se lee como "si se supone Γ *se deduce a* α*". La fórmula* α *es llamada el consecuente y la parte* Γ *el antecedente.*

Outline

Sistema proposicional intuicionista

Se considera como axioma:

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

y como reglas de inferencia:

$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Delta \Rightarrow \beta}{[\Gamma, \Delta] \Rightarrow \alpha \wedge \beta} \wedge \mathrm{I}$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha} \wedge E \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}{\Gamma \Rightarrow \beta} \wedge E$
$\dfrac{\alpha^0, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta} \to I$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow (\alpha \to \beta) \qquad \Delta \Rightarrow \alpha}{[\Gamma, \Delta] \Rightarrow \alpha} \to \mathrm{E}$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta} \vee I$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta \qquad \alpha^0, \Delta \Rightarrow \phi \qquad \beta^0, \Sigma \Rightarrow \phi}{[\Gamma, \Delta, \Sigma] \Rightarrow \phi}$

$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta} \vee I$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow \phi} \perp \mathsf{E}$

El superíndice ^{0} significa que la hipótesis no es necesaria.

Las siguientes dos reglas también son derivables en **NJp**:

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \Rightarrow \phi}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \phi}\ \text{Contracción}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \phi}{\alpha, \Gamma \Rightarrow \phi}\ \text{Debilitamiento}$$

Una deducción natural o una prueba en el sistema **NJp** es definida en la manera estándar: es un árbol que inicia con los axiomas y procede mediante las reglas de inferencia del sistema.

Ejemplo

La fórmula $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ es derivable en **NJp**:

$$\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{p \Rightarrow q \rightarrow p}}{p \rightarrow (q \rightarrow p)}$$

la segunda y la tercera línea resultan de introducción de la implicación.

Como observación, en este sistema vale compacidad y teorema de deducción por lo tanto, $\Gamma \Rightarrow \alpha$ implica que existen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tales que $\Rightarrow (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \rightarrow \alpha$

Outline

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Semántica de mundos posibles

Definición (Modelo proposicional intuicionista)

Un modelo proposicional intuicionista es una tripleta ordenada $\langle W, R, V \rangle$, donde W es un conjunto no vacío, R es una relación reflexiva y transitiva en W y V:$\Phi \times W \rightarrow \{0, 1\}$ tal que:

$$V(p, w) = 1 \text{ y } Rww' \text{ implica } V(p, w') = 1$$

Los elementos en $w \in W$ son llamados mundos, R es llamada la relación de accesibilidad donde Rww' se lee como w tiene acceso a w' o w' es accesible desde w, la función V es llamada función de evaluación. Un par $\langle W, R \rangle$ es llamado una estructura intuicionista de Kripke.

Definición

Sea Φ un conjunto de letras proposicionales y sea $\mathcal{L}(\Phi)$ el conjunto de fórmulas bien formadas a partir de las letras en Φ. Sea $\langle W, R, V \rangle$ un modelo intuicionista; la función de evaluación V se puede extender a una función $\mathbf{V}:\mathcal{L}(\Phi) \times W \to \{0, 1\}$ tal que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\bot, w) &= 0 \\
\mathbf{V}(p, w) &= V(p, w) \text{ si p es una variable proposicional} \\
\mathbf{V}(\alpha \wedge \beta, w) &= \text{mín}\{\mathbf{V}(\alpha, w), \mathbf{V}(\beta, w)\} \\
\mathbf{V}(\alpha \vee \beta, w) &= \text{máx}\{\mathbf{V}(\alpha, w), \mathbf{V}(\beta, w)\} \\
\mathbf{V}(\alpha \to \beta, w) &= 1 \text{ sii } \mathbf{V}(\alpha, w') = 1 \text{ implica } \mathbf{V}(\beta, w') = 1 \\
&\qquad \text{para todo } w' \in W \text{ tal que } Rww'
\end{aligned}$$

Semántica de mundos posibles

Algunas consecuencias de la definición:

- $\mathbf{V}(\neg\alpha, w) = 1$ si y solo si $\mathbf{V}(\alpha, w') = 0$ para todo $w' \in W$ tal que Rww'.
- $\neg\alpha$ es verdad en w si y solo si α es falso en todo mundo accesible desde w.
- La disyunción y la negación se comportan de manera clásica (de manera booleana).
- $\alpha \rightarrow \beta$ es verdad en w si y solo si la verdad de α implica la verdad de β en todo mundo accesible desde w. En otras palabras cuando α es justificado, β será justificado.

En vez de $\mathbf{V}(\alpha, w)$ se escribirá algunas veces $w \Vdash \alpha$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Semántica de mundos posibles

- La fórmula φ es verdad en el mundo w de un modelo M sii $\mathbf{V}(\varphi, w) = 1$ lo que se denota por $M, w \Vdash \varphi$.
- la fórmula φ es válida en un modelo intuicionista $M = \langle W, R, V \rangle$ sii es verdad en todo mundo $w \in W$ y se escribe $M \Vdash \varphi$.

Ejemplo

Sea $W = \{w_0, w_1\}$, sea $R = \{(w_0, w_0), (w_0, w_1), (w_1, w_1)\}$ la relación de accesibilidad, y sea V dada por $V(p, w_1) = 1$ y 0 en cualquier otro caso. La fórmula $p \vee \neg p$ no es válida en el modelo $\langle W, R, V \rangle$ ya que:
$\mathbf{V}(p \vee \neg p, w_0) = max\{\mathbf{V}(p, w_0), \mathbf{V}(\neg p, w_0)\} = max\{0, \mathbf{V}(\neg p, w_0)\}$
además ,
$\mathbf{V}(\neg p, w_0) = 0$ ya que Rw_0w_1 y $V(p, w_1) = 1$. por lo tanto
$\mathbf{V}(p \vee \neg p, w_0) = 0$.

Outline

Teorema

Sea α una fórmula, entonces $\Gamma \Rightarrow \alpha$ implica $M \Vdash \alpha$ para todo modelo intuicionista M

Outline

Estructuras punteadas y órdenes parciales

Definición

- Una estructura punteada es una tripleta $\langle G, W, R \rangle$ donde $\langle W, R \rangle$ es una estructura, $G \in W$ y RGw para todo $w \in W$.
- Un modelo punteado es una tupla $M = \langle G, W, R, V \rangle$, donde $\langle G, W, R \rangle$ es una estructura punteada y V es una evaluación en $\langle W, R \rangle$.
- Verdad en M es verdad en el mundo G:

$$M \Vdash \varphi \text{ sii } V(\varphi, G) = 1$$

.

Lema

Una fórmula es válida si y solo si es verdad en todo modelo punteado.

Definición

Una relación R sobre un conjunto W, reflexiva, antisimétrica y transitiva es un orden parcial.

Teorema

Una fórmula φ es válida si y solo si es verdad en todo los modelos punteados $\langle G, W, R\rangle$ parcialmente ordenados por R.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Outline

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Nociones de topología

Definición (Espacio topológico)

Sea X un conjunto diferente del vacío y $\tau \subseteq P(X)$ el par (X, τ) es llamado un espacio topológico si cumple que:

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. si $A_1, \ldots, A_n \in \tau$ entonces $\bigcap_{k=1}^{k=n} A_k$
3. si $A \subseteq \tau$ entonces $\bigcup A \in \tau$.

El conjunto X se conoce como el espacio y a τ se le llama topología sobre el espacio X.
A los elementos de τ se les llama abiertos de la topología y si $F \subseteq X$ es tal que $F = X \setminus A$ donde $A \in \tau$ se dice que este conjunto es un cerrado de la topología.

Como ejemplo de espacio topológico considere $(\mathbb{R}, \tau)$ donde $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} | \forall_{x \in A} \exists_{(a,b) \subseteq A} (x \in (a, b))\}$ este espacio topológico es llamado espacio euclidiano.

Definición (Base para un espacio topológico)

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $B \subseteq \tau$. El conjunto B es llamado una base para el espacio topológico (X, τ) si todo abierto de τ se puede escribir como una unión de los abiertos que están en B.

Como ejemplo de base considere el espacio euclidiano arriba y $B = \{(a, b) \,| a, b \in \mathbb{R}\}$

Definición (Interior)

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$, se define el interior de A como el conjunto

$$Int(A) = \{x \in A | \exists_{B \in \tau} (x \in B \subseteq A)\}$$

Ejemplo

Sea $(\mathbb{R}, \tau)$ la topología euclidiana: $Int([a, b]) = (a, b)$

Outline

1. Sistema de deducción natural NJp para la lógica proposicional intuicionista
   - Sintaxis
   - Sistema proposicional intuicionista
2. Modelos de kripke
   - Semántica de mundos posibles
   - Validez y completitud del sistema NJp
   - Estructuras punteadas y órdenes parciales
3. Semántica topológica
   - Nociones de topología
   - Interpretación topológica

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803

Interpretación topológica

Definición

Una interpretación en un espacio topológico (X,τ) es una función de asignación $V{:}\Phi{\to}\tau$.

Esta definición se extiende al conjunto $\mathcal{L}(\Phi)$ mediante una función $\mathbf{V}{:}\mathcal{L}(\Phi){\to}\tau$. como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\bot) &= \varnothing \\
\mathbf{V}(p) &= V(p) \text{ si p es una variable proposicional} \\
\mathbf{V}(\alpha\wedge\beta) &= \mathbf{V}(\alpha)\cap\mathbf{V}(\beta) \\
\mathbf{V}(\alpha\vee\beta) &= \mathbf{V}(\alpha)\cup\mathbf{V}(\beta) \\
\mathbf{V}(\alpha\to\beta) &= Int((X\setminus\mathbf{V}(\alpha))\cup\mathbf{V}(\beta))
\end{aligned}$$

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico.

- Una fórmula α es verdad en una interpretación **V** sii $\mathbf{V}(\alpha) = X$.
- Una fórmula α es válida en un espacio X si es verdad bajo cualquier interpretación en X.

Teorema (completitud)

Una fórmula es derivable en **NJp** *si y solo si es válida en todo espacio* X