Aplicación del Modelo Black-Litterman al Mercado de Renta Variable Colombiano

Susana Luna Ramírez*
Miguel Tamayo Jaramillo**

Tutor: Ph.D Diego Alonso Agudelo Rueda***
Grupo de investigación en Finanzas y Banca GYFB
Escuela de Economía y Finanzas

Universidad EAFIT

2015

Resumen

El modelo Black-Litterman es una mejora al modelo de media-varianza de Markowitz. Se aplica este modelo al mercado de renta variable colombiano y se realiza una comparación de desempeño trimestral histórico con el COLCAP, el índice bursátil más representativo de Colombia. Como datos de entrada se toman las recomendaciones en consenso de los analistas financieros de Bloomberg, el histórico de Prima de Riesgos de Damodaran, el Indicador Bancario Interbancario (IBR) y los portafolios trimestrales del COLCAP. Se encuentra que a partir de la metodología sugerida en base a información pública el modelo Black-Litterman supera al COLCAP en un 73.08 % de los trimestres. Además, se realizan comparaciones con respecto a la media y a la medida de rentabilidad adicional α, presentando Black-Litterman un mejor desempeño en ambos casos, y por último se encuentra que los resultados son intuitivos y diversificados.

1. Introducción

La determinación del portafolio óptimo de activos financieros es un tema ampliamente estudiado por sus múltiples aplicaciones para los inversionistas institucionales, entre los que se encuentran fondos de pensiones, fiduciarias, fondos mutuos, carteras colectivas, entre otros. Esto es suficiente justificación para una búsqueda constante de nuevos y más sofisticados modelos matemáticos que permitan la asignación óptima de activos de forma más eficiente que los modelos ya existentes.

Harry Markowitz es el pionero en presentar un modelo conceptual para la creación de portafolios eficientes mediante un proceso de optimización con base en la media-varianza de los activos financieros [Markowitz, 1952]. Sin embargo, la aplicación directa de dicho modelo, con base en medias y varianzas-covarianzas históricas entregan resultados poco intuitivos, poco diversificados, muy sensibles a los parámetros e inestables [Drobetz, 2001], razón por la cual a pesar de ser el modelo más estudiado en la academia, no resulta tan aplicado en la practica.

*correo: slunara@eafit.edu.co
**correo: mtamayo6@eafit.edu.co
***correo: dagudelo@eafit.edu.co

El modelo Black-Litterman (BL)[Black and Litterman, 1991] desarrollado por Fischer Black y Robert Litterman ofrece una respuesta a dichas limitaciones y hace dos contribuciones importantes al problema de asignación de activos al incluir como punto de partida el portafolio de equilibrio de mercado y las percepciones de rentabilidades futuras de los inversionistas. Ésto último lo logran con principios de estadística Bayesiana [Bayes and Price, 1763], la cual ofrece la posibilidad de agregar conocimiento *extra muestral* para la estimación de los modelos.

Dada la riqueza teórica y práctica, el estado del arte del modelo BL ha cambiado significativamente desde su publicación. En [Satchell and Scowcroft, 2000] se introduce una expresión no Bayesiana al modelo y se incluye un parámetro estocástico para escalar la matriz de varianzas y covarianzas. En [Drobetz, 2001] se compara las implementaciones tradicionales de optimización de portafolios, tales como el CAPM y las carteras por capitalización de mercado con el modelo BL. Se concluye que los portafolios estimados a partir de BL reducen los problemas asociados con la estimación de errores y además la composición de los portafolios es más intuitiva y presenta un menor grado de sensibilidad. La comparación de las diferentes implementaciones es realizada a partir de los retornos mensuales del índice bursátil por capitalización de mercado de la eurozona, Dow Jones STOXX . En [Giacometti et al., 2007] se computa el portafolio neutral mediante una distribución de Pareto en vez de la distribución normal descrita en el modelo original, además usan múltiples medidas de riesgo como VaR y CVar.

En Colombia, [Segura, 2009] realiza una aplicación del modelo BL a los fondos de pensiones obligatorias para la construcción de portafolios óptimos (tomando como activos deuda local, acciones locales, deuda externa colombiana, acciones en Estados Unidos, acciones internacionales, acciones en mercados emergentes, deuda en mercados emergentes, títulos del Tesoro de Estados Unidos y depósitos locales). En [León and Vela, 2011] se aplica el modelo BL para la asignación estratégica de activos en el caso de reservas extranjeras y por último, en [Franco-Arbeláez et al., 2011] se examinan las fortalezas teóricas del modelo BL.
En los tres estudios anteriormente mencionados se resaltan las ventajas del modelo al presentar resultados intuitivos, estables y eficientes. Aun así, no se ha encontrado evidencia de investigaciones que, en la práctica, realicen una comparación entre el modelo BL y los modelos tradicionales para la determinación de portafolios óptimos en el mercado financiero de renta variable colombiano. ¿Presenta el modelo BL buenos resultados de acuerdo a las particularidades del mercado de renta variable colombiano?, ¿Cómo diseñar una metodología válida para realizar la evaluación con la información histórica disponible? y ¿En la práctica, el modelo BL realmente presenta los atributos teóricos que se le adjudican? El aporte de este artículo es dar una respuesta válida a dichos cuestionamientos por medio de un análisis estadístico y financiero de los resultados obtenidos a partir de la metodología diseñada.

Para dar respuesta a lo anterior, el presente artículo se divide de la siguiente forma, en la sección 2 se presenta una descripción detallada del modelo matemático, la sección 3 presenta la metodología propuesta para la implementación del modelo empleando información pública y basado principalmente en [He et al., 2013], la sección 4 presenta los resultados obtenidos a partir del modelo Black-Litterman y la comparación de estos con el COLCAP mediante diferentes medidas de desempeño y por último en la sección 5 se concluye.

2. Modelo matemático

En términos generales, el modelo BL está basado en estadística bayesiana por lo que implícitamente exige para su formulación la presencia de una distribución de *Probabilidad a Priori* y una distribución de *Probabilidad Condicional* con sus respectivos momentos, para así obtener una *Probabilidad Posterior*.

Específicamente BL parte de una serie de rentabilidades esperadas de un portafolio neutral, definido como aquel que replica al mercado en el caso en que todos los inversionistas tengan las mismas perspectivas [Black and Litterman, 1992]. Estas rentabilidades esperadas se encuentran por medio de optimización inversa, es decir, en lugar de encontrar una ponderación dado una rentabilidad determinada se busca una serie de rentabilidades esperadas dado unas ponderaciones:

$$\Pi = \delta \Sigma W_{mercado} \tag{1}$$

Sea n el número de activos, Π_{nx1} es el vector que representa los retornos implícitos del mercado, δ un escalar que representa la aversión al riesgo del mercado, Σ_{nxn} la matriz de covarianza de las rentabilidades de los activos seleccionados y $W_{mercado \quad nx1}$ el vector que contiene las ponderaciones por capitalización de mercado.

La ecuación (1) se deriva a partir de la ecuación de utilidad cuadrática:

$$U = w^T \Pi - (\frac{\delta}{2}) w^T \Sigma w \tag{2}$$

La función objetivo en la optimización de media-varianza es U, la cual denota la utilidad de los inversionistas. Al ser U una función convexa tendrá solo un máximo global, de modo que se maximiza la utilidad sin ninguna restricción al tomar la primera derivada de la ecuación 2 con respecto a w e igualar a 0:

$$\frac{dU}{dw} = \Pi - \delta \Sigma w = 0 \tag{3}$$

Ahora, sea $w = W_{mercado}$ de (3) se obtiene la ecuación (1).

Para la distribución de la *Probabilidad a Priori* la media es Π y la varianza es la matriz de covarianzas Σ multiplicada por un parámetro escalar τ. Este parámetro es creado como una constante de proporcionalidad ya que BL parte del supuesto que la estructura de la matriz de covarianza del estimado es proporcional a la covarianza de las rentabilidades Σ, por lo tanto, τ se usa para disminuir la varianza de dicha distribución. Matemáticamente,

$$P(A) \sim N(\Pi, \tau \Sigma) \tag{4}$$

Las perspectivas de los inversionistas se expresan en términos de la *Probabilidad Condicional*, es decir, la probabilidad de que ocurra un evento B dado un evento A, particularmente, A representa la rentabilidad del mercado dado datos históricos y B los resultados esperados por los analistas, es decir, las perspectivas y la rentabilidad esperada para cada activo. Es en esta distribución de probabilidad que se incorporan las expectativas del inversionista, siendo éste el aporte más significativo e innovador del modelo BL,

$$P(B \mid A) \sim N(P^{-1}Q, P^T \Omega P) \tag{5}$$

Sea k el número de perspectivas, entonces, P_{kxn} es la matriz que incluye las perspectivas, Q_{1xk} el vector de rentabilidades de las perspectivas consecuentes[1] y Ω_{kxk} es la matriz diagonal de covarianzas de las perspectivas.

Dadas las distribuciones de probabilidad a Priori y Condicional, ecuaciones (4) y (5) respectivamente, se aplica el Teorema de Bayes y se deriva la distribución de *Probabilidad Posterior* que permite encontrar las estimaciones de las rentabilidades y la matriz de varianzas y covarianzas.

$$P(A \mid B) \sim (\hat{\Pi}, M)$$

$$\begin{aligned} P(A \mid B) \sim N([(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q][(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}Q]^{-1}, \\ [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}) \end{aligned} \tag{6}$$

Una representación alternativa de la misma fórmula de la media de rentabilidades ($\hat{\Pi}$) y la covarianza (M) por medio de propiedades matriciales es:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} &= \Pi + \tau\Sigma P^T[(P\tau\Sigma P^T) + \Omega]^{-1}(Q - P\Pi) \\ M &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} \end{aligned} \tag{7}$$

Así, intuitivamente el vector de rendimientos esperados ($\hat{\Pi}$) parte de los rendimientos en equilibrio (Π) y le adiciona el efecto de las perspectivas, éstas están en términos de las matrices P, Q y Ω anteriormente descritos. Específicamente, $(Q - P\Pi)$ representa la diferencia entre las rentabilidades esperadas por los analistas y la rentabilidad implícita de las perspectivas con las rentabilidades actuales, por otro lado, $\tau\Sigma P^T[(P\tau\Sigma P^T) + \Omega]^{-1}$ representa el efecto de las perspectivas elegidas en la matriz de covarianzas inicial, es decir, se le da mayor importancia en dicha matriz a los activos pertenecientes a las perspectivas.

Adicionalmente, [He and Litterman, 2002] propone adicionarle el error de la media a la covarianza encontrada en (6) para computar la covarianza posterior de la siguiente manera:

$$\Sigma_p = \Sigma + M \tag{8}$$

Por lo tanto, despejando (1) y reemplazando los valores encontrados en (8), se encuentran los pesos del portafolio óptimo en la frontera eficiente del modelo BL (w_{BL}),

$$w_{BL} = \hat{\Pi}(\delta\Sigma_p)^{-1}$$

en donde $\hat{\Pi}$ de dimensiones $1xn$ es la media de las rentabilidades posterior y Σ_p la matriz nxn de covarianzas de las rentabilidades posteriores.

[1]Un ejemplo de la estructura de P y Q al elegir cinco activos con dos perspectivas diferentes es

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} -4\,\% & 6{,}2\,\% \end{bmatrix}$$

Para la primera perspectiva se espera una rentabilidad del -4 %, mientras que para la segunda una rentabilidad del 6.2 %

3. Metodología

El estudio se realizó para las acciones del COLCAP en el mercado accionario colombiano en un periodo de tiempo comprendido entre enero de 2009 a junio de 2015. En dicho lapso el modelo se estimó con una frecuencia trimestral. De la plataforma Bloomberg se obtuvieron los precios diarios de cierre de acciones, la composición trimestral del COLCAP, las en consenso promedio de los analistas con la función EQY_REC_CONS y los precios objetivos con la función $BEST\_TARGET\_PRICE$, la Prima de Riesgo fue tomada de la página web de Aswath Damodaran y la tasa de riesgo de corto plazo IBR tomada de la página web del Banco de la República de Colombia.

3.1. Optimización inversa

Retomando la ecuación (1) para las ponderaciones en equilibrio ($W_{mercado}$) se replican las ponderaciones del índice COLCAP[2].

La matriz de covarianza (Σ) se calcula a partir de los rendimientos diarios de los tres últimos meses, se usa este periodo de tiempo ya que la constitución del COLCAP varía trimestralmente. Este periodo de tiempo además es recomendado en [He et al., 2013]

Para el coeficiente de aversión al riesgo del mercado, δ, en [Grinold and Kahn, 2000] se sugiere su cálculo a partir de la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{E[R]_m - R_f}{\sigma_m^2} \\ &= \frac{Prima\ de\ Riesgo}{\sigma_m^2} \end{aligned}$$

Como Prima de Riesgo se utiliza la tasa de descuento que el profesor Aswath Damodaran publica anualmente en su página web [Damodaran, 2015], siendo una estimación de la Prima de Riesgo ampliamente aceptada por los inversionistas financieros a nivel global. Para tener consistencia en el periodo de tiempo la Prima de Riesgo anual se convierte a trimestral y lo mismo sucede con la varianza de mercado, calculada en primera instancia a partir de la desviación diaria del índice COLCAP y que luego se transforma a su valor trimestral.

Al estimar la media de una distribución, la varianza del error en su estimación debe ser proporcional al inverso del tamaño de la muestra. Es decir, como la matriz de covarianzas Σ está generada por datos históricos, se usa el estimador de Máxima Verosimilitud para calcular τ, donde, sea L el tamaño de la muestra, $\tau = \frac{1}{L}$ [Walters, 2014]. Este parámetro denota una medida de incertidumbre y es generalmente cercano a 0, ya que la incertidumbre sobre la media debe ser menor que sobre los rendimientos Π [Idzorek, 2002].

3.2. Expresión de las perspectivas

Las perspectivas de los analistas (P_{kxn}) contiene los k portafolios de las perspectivas. Para obtener estos portafolios se toma el promedio de las recomendaciones en consenso, en donde los analistas

[2] Esta ponderación se determina de acuerdo a la Capitalización Flotante y tiene más sentido en Colombia con respecto a la Capitalización Bursátil (recomendada por los autores en el modelo inicial) por la alta concentración de acciones en poder de accionistas controladores.

financieros evalúan cierta compañía cuantitavimanente en un rango de 1 a 5, estos valores indican respectivamente venta y compra fuerte.
En [He et al., 2013] se recomienda tomar 3 subdivisiones de este rango, para diseñar tres portafolios diferentes, P_{venta}, $P_{mantenga}$ y P_{compra}. Particularmente, se eligen las siguientes subdivisiones:

$$\begin{array}{rl} x < 3 & vender \\ 3 \leq x < 4 & mantener - comprar \\ 4 \leq x \leq 5 & comprar - comprar \ \ fuerte \end{array}$$

Las perspectivas son absolutas, es decir, la suma de cada uno de los tres portafolios debe ser igual a uno.

$$\sum_{j=1}^{n} P_{kj} = 1$$

El peso de cada una de las acciones es proporcional a las ponderaciones del COLCAP;
[He and Litterman, 2002, Idzorek, 2002] lo sugieren proporcional a la Capitalización Bursátil, pero como ya se explicó previamente tiene más sentido en Colombia trabajar con la ponderación por Capitalización Flotante, es decir, proporcional al índice COLCAP.

Las rentabilidades de las perspectivas (Q) son tomadas a partir de los precios actuales y los precios objetivos promedio establecidos por los analistas, estos precios objetivos son el valor de cada una de las acciones que los analistas preveen tendrán en un año, por lo que esa rentabilidad anual se convierte a trimestral.

La matriz de covarianza de las perspectivas (Ω) es proporcional a la varianza de las rentabilidades tal como la varianza de la distribución de *probabilidad a priori* lo es. Se asume que las perspectivas son independientes entre sí, lo que implica que la matriz Ω sea diagonal. En [He and Litterman, 2002] y [Meucci, 2006] se sugiere para su cálculo:

$$\Omega = diag(P(\tau\Sigma)P^T)$$

3.3. Evaluación del modelo

Luego de realizar todas las estimaciones del modelo en el periodo y la frecuencia de tiempo determinadas, se obtiene la ponderación del portafolio óptimo trimestral sugerido por BL y se realiza una comparación de rendimientos con el COLCAP respecto a la media y a la medida de agregación de valor α.

Dado que el mercado de Renta Variable colombiano no permite ventas en corto, las ponderaciones luego de obtener w_{BL} que son negativas se convierten a cero, es decir, se recomienda no invertir en esta acción. A su vez estas ponderaciones se normalizan con el objetivo de que sea una inversión del 100 % en los activos restantes.

Para evaluar el desempeño de los portafolios acorde con el CAPM, es necesario hacer la diferencia entre cada uno de los rendimientos de cada uno de los portafolios y la tasa libre de riesgo.[3] Se escoge el IBR como tasa libre de riesgo, ya que el portafolio se evalúa en el corto plazo. Con α [4] se evalúa que el resultado sea estadísticamente significativo mediante una prueba t de significancia.

[3] $E[R_i] - Rf = \beta(E[R]_{mercado} - Rf) + \alpha$.
[4] Sea α el intercepto de la regresión lineal entre BL y el COLCAP.

Además se examina que en la práctica el modelo resulte robusto frente a cambios en el parámetro de aversión al riesgo δ, realizando un análisis de sensibilidad en este parámetro de $\pm$ 5 % y $\pm$ 10 %.

4. Resultados

Se verifica que los tres portafolios creados a partir de las recomendaciones en consenso sean consecuentes con lo que sugieren, es decir, que en promedio el portafolio compra tenga mejores resultados que los portafolios de mantenga y venta, y que además este portafolio tenga un valor de α positivo con respecto al COLCAP. En la tabla 1, se muestran estas relaciones.

Tabla 1: *Rendimientos trimestrales Portafolios de Perspectivas vs COLCAP*

Fecha Final	P_{venta}	$P_{mantenga}$	P_{compra}	**COLCAP**
Enero 2009	-3.37 %	14.64 %	26.99 %	5.20 %
Abril 2009	22.66 %	5.15 %	-4.27 %	22.69 %
Julio 2009	1.76 %	16.26 %	11.62 %	7.75 %
Octubre 2009	1.30 %	15.14 %	13.31 %	7.65 %
Enero 2010	10.19 %	-3.22 %	9.97 %	6,.79 %
Abril 2010	0.22 %	10.42 %	5.06 %	6.35 %
Julio 2010	9.74 %	22.71 %	6.52 %	20.28 %
Octubre 2011	-10.15 %	-12.29 %	8.88 %	-8.06 %
Enero 2011	-1.93 %	-0.45 %	-13.00 %	-4.30 %
Abril 2011	-12.63 %	-2.49 %	-3.15 %	-3.38 %
Julio 2011	-3.46 %	0.48 %	-4.25 %	-3.31 %
Octubre 2011	7.05 %	-5.35 %	0.22 %	-0.42 %
Enero 2012	-2.33 %	1.32 %	9.64 %	8.09 %
Abril 2012	-1.25 %	-9.40 %	-5.94 %	-7.51 %
Julio 2012	4.56 %	1.90 %	11.04 %	6.96 %
Octubre 2012	1.96 %	4.19 %	0.64 %	2.04 %
Enero 2013	-19.98 %	-7.87 %	-1.86 %	-10.59 %
Abril 2013	-0.49 %	-1.54 %	-0.50 %	-1.00 %
Julio 2013	6.93 %	5.22 %	-0.58 %	2.92 %
Octubre 2013	-14.24 %	-18.13 %	-17.16 %	-17.00 %
Enero 2014	4.38 %	20.02 %	17.21 %	13.78 %
Abril 2014	-9.02 %	3.28 %	3.96 %	0.45 %
Julio 2014	-17.47 %	-5.19 %	-0.12 %	-4.51 %
Octubre 2014	-4.70 %	-21.12 %	-6.60 %	-16.11 %
Enero 2015	4.54 %	-0.59 %	-0.38 %	-0.54 %
Promedio	**-1.03 %**	**1.32 %**	**2.69 %**	**1.37 %**
α	**-1.78 %**	**0.08 %**	**2.373 %**	
R^2	**57.39 %**	**70.05 %**	**33.11 %**	

En la Tabla 1 se muestra que el rendimiento promedio de los portafolios conformados con base en las recomendaciones en consenso de los analistas si muestran las relaciones esperadas, es decir, que el promedio de rendimientos de menor a mayor sea el de portafolio de venta, mantenga y por último el de compra. Es importante hacer esta verificación pues no tiene sentido realizar un modelo en base a perspectivas erróneas. El resultado anterior también se verifica con el valor que toma α, pues este también conserva las relaciones entre los tres portafolios. Ahora bien, al analizar la significancia de cada uno de los valores de α, se encuentra que sólo $P_{mantenga}$ es marginalmente diferente de cero con un nivel de confianza del 90 %.

Teniendo en cuenta la metodología descrita en la sección anterior, en la Tabla 2 se muestran los resultados del modelo estimado con BL.

Tabla 2: *Rendimientos Black-Litterman vs COLCAP*

Fecha Fecha Final	**R[BL]**	**R[COLCAP]**	**Fecha Inicial**	**R[BL]**	**R[COLCAP]**
Enero 2009	4.49 %	5.20 %	Octubre 2012	1.46 %	2.04 %
Abril 2009	26.02 %	22.69 %	Enero 2013	-6.47 %	-10.59 %
Julio 2009	11.71 %	7.75 %	Abril 2013	0.82 %	-1.00 %
Octubre 2009	13.68 %	7.65 %	Julio 2013	2.01 %	2.92 %
Enero 2010	9.78 %	6,.79 %	Octubre 2013	-17.24 %	-17.00 %
Abril 2010	10.35 %	6.35 %	Enero 2014	18.23 %	13.78 %
Julio 2010	12.03 %	20.28 %	Abril 2014	1.74 %	0.45 %
Octubre 2011	-10.93 %	-8.06 %	Julio 2014	-4.79 %	-4.51 %
Enero 2011	-3.42 %	-4.30 %	Octubre 2014	-14.21 %	-16.11 %
Abril 2011	-2.82 %	-3.38 %	Enero 2015	3.63 %	-0.54 %
Julio 2011	-2.48 %	-3.31 %	Abril 2015	5.55 %	-4.73 %
Octubre 2011	0.07 %	-0.42 %	**Promedio**	**2.80 %**	**1.13 %**
Enero 2012	8.72 %	8.09 %	α	**1.69 %**	
Abril 2012	-5.92 %	-7.51 %	R^2	**88.70 %**	
Julio 2012	10.67 %	6.96 %	Valor p	**0.0198**	

En la tabla 2 se evidencia que los rendimientos de Black-Litterman superan a los rendimientos del índice COLCAP en un 73.08 % de los trimestres de la evaluación. Además, en promedio Black-Litterman tiene un rendimiento trimestral de 2.8 %, mientras que el del COLCAP es 1.13 % lo que sugiere que el modelo bajo la metodología propuesta sobrepasa al índice con un rendimiento del 1.67 % trimestral. BL tiene una medida de agregación de valor (α) del 1.69 % trimestral con respecto al COLCAP, siendo este valor estadísticamente diferente de cero con un nivel del significancia del 98 %.

También es importante analizar la bondad de ajuste del modelo por medio del coeficiente de determinación (R^2), pues esta medida determina la calidad para replicar resultados. Este coeficiente tiene un valor de 88.70 % para el portafolio de BL, el cual, al ser cercano a 1 evidencia que la regresión lineal entre BL y el COLCAP es adecuada para describir la relación existente entre ambos portafolios. Además el R^2 tiene una interpretación de diversificación (proporción de riesgo sistemático a idiosincrático), indicando que el portafolio BL tiene una alta diversificación.

Teniendo claro lo anterior, es pertinente realizar una comparación entre los coeficientes de determinación (R^2) y la medida de agregación de valor (α) mostrados en las tablas 1 y 2. Se evidencia que el portafolio P_{compra} tiene un valor de α mayor que el obtenido en el portafolio BL, lo cual contradice la finalidad del modelo, pues se obtienen mayores rentabilidades en exceso solo teniendo en cuenta el promedio de recomendaciones en consenso de compra sin necesidad de estimar el portafolio óptimo a partir del modelo BL. Aun así P_{compra} presenta un R^2 muy bajo, lo que significa una mala diversificación de las acciones, siendo esto perjudicial para el inversionista.

En la tabla 3 se muestra la diferencia entre el modelo Black-Litterman con una variación porcentual determinada en el parámetro de aversión al riesgo (δ) y el modelo Black-Litterman con el δ determinado bajo la metodología propuesta.

Tabla 3: *Análisis de sensibilidad: diferencia entre BL con cambios en δ y normal*

	+5 %	+10 %	-5 %	-10 %
α	1.68 %	1.68 %	1.69 %	1.69 %
Valor p	0.0188	0.0179	0.0208	0.0218

Se evidencia que el modelo es robusto ante cambios porcentuales en este parámetro, lo que significa que los resultados presentados en la tabla 2 son dependientes al parámetro de aversión al riesgo pero no están sujetos en gran medida a él.

Tabla 4: *Black-Litterman julio-2012*

	W_{COLCAP}	P_{venta}	$P_{mantenga}$	P_{compra}	W_{BL}
CORFICOL	3,41 %	0,00 %	0,00 %	5,87 %	5,63 %
CEMARGOS	3,72 %	0,00 %	0,00 %	6,38 %	6,13 %
GRUPOSUR	12,46 %	0,00 %	0,00 %	21,41 %	20,56 %
ISAGEN	2,86 %	0,00 %	13,66 %	0,00 %	0,52 %
GRUPOARG	6,41 %	0,00 %	0,00 %	11,02 %	10,58 %
PFBCOLO	13,52 %	0,00 %	0,00 %	23,24 %	22,32 %
PFDAVVND	2,70 %	0,00 %	0,00 %	4,63 %	4,45 %
NUTRESA	6,87 %	0,00 %	0,00 %	11,81 %	11,34 %
ISA	6,23 %	0,00 %	29,79 %	0,00 %	1,13 %
EXITO	7,54 %	0,00 %	36,04 %	0,00 %	1,37 %
PFAVAL	4,06 %	0,00 %	19,43 %	0,00 %	0,74 %
TABLEMA	0,25 %	0,00 %	0,00 %	0,43 %	0,42 %
ECOPETL	20,00 %	97,20 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
PMGC	0,78 %	0,00 %	0,00 %	1,34 %	1,29 %
ETB	0,23 %	0,00 %	1,08 %	0,00 %	0,04 %
BVC	0,48 %	0,00 %	0,00 %	0,83 %	0,80 %
PFAVH	0,72 %	0,00 %	0,00 %	1,23 %	1,18 %
FABRI	0,58 %	2,80 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
PREC	6,87 %	0,00 %	0,00 %	11,80 %	11,33 %
CNEC	0,32 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,17 %
Q		0,6 %	2,9 %	6,0 %	

En la tabla 4 se muestra el resultado luego de aplicar el modelo Black-Litterman para julio de 2012 dado la metodología propuesta, con el fin de mostrar la intuitividad del modelo.

Se evidencia que el portafolio óptimo estimado por BL es acorde a las perspectivas estipuladas por los analístas, ya que la proporción de las acciones listadas en P_{venta} disminuye en la estimación de BL. Las acciones pertenecientes a $P_{mantenga}$ permanecen con un valor similar en ambos portafolios y finalmente las acciones que pertenecen a P_{compra} aumentaron la proporción en el portafolio BL con respecto al del COLCAP.

Además, se evidencia que los valores de Q obtenidos con la metodología especificada son consecuentes en la realidad, ya que P_{venta} tiene la menor rentabilidad asociada y P_{compra} la mayor.

5. Conclusiones

Bajo la metodología propuesta, las rentabilidades de Black-Litterman son en promedio mayores que las del mercado, teniendo una medida de agregación de valor positiva y estadísticamente diferente de cero.

El modelo Black-Litterman es robusto frente a cambios en el parámetro de aversión al riesgo y el portafolio óptimo que sugiere es intuitivo.

Las recomendaciones en consenso son una buena aproximación para determinar la perspectivas de los inversionistas y este conocimiento extra muestral es consistente para ser usado en el modelo Black-Litterman. A su vez, es válido utilizar los precios objetivo promedio, establecidos por los analistas, como metodología para hallar las rentabilidades esperadas (Q).

A pesar que la medida de agregación de valor (α) para el portafolio compre es mayor que la de Black-Litterman, este portafolio es poco diversificado lo que se traduce en una medida de bondad de ajuste *mala*, lo cual le suma importancia a la aplicación de Black-Litterman como modelo para encontrar un portafolio óptimo en el mercado de renta variable colombiano.

Referencias

[Bayes and Price, 1763] Bayes, M. and Price, M. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. by the late rev. mr. bayes, frs communicated by mr. price, in a letter to john canton, amfrs. *Philosophical Transactions (1683-1775)*, pages 370–418.

[Black and Litterman, 1992] Black, F. and Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5):28–43.

[Black and Litterman, 1991] Black, F. and Litterman, R. B. (1991). Asset allocation: combining investor views with market equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, 1(2):7–18.

[Damodaran, 2015] Damodaran, A. (2015). Country default spreads and risk premiums. http://people.stern.nyu.edu/adamodar/. [Online; accessed 12 October, 2015].

[Drobetz, 2001] Drobetz, W. (2001). How to avoid the pitfalls in portfolio optimization? Putting the Black-Litterman approach at work. *Financial Markets and Portfolio Management*, 15(1):59–75.

[Franco-Arbeláez et al., 2011] Franco-Arbeláez, L. C., Avendaño-Rúa, C. T., and Barbutín-Díaz, H. (2011). Modelo de markowitz y modelo de Black-Litterman en la optimización de portafolios de inversión. *Tecno Lógicas*, (26):71–88.

[Giacometti et al., 2007] Giacometti, R., Bertocchi, M., Rachev, S. T., and Fabozzi, F. J. (2007). Stable distributions in the Black-Litterman approach to asset allocation. *Quantitative Finance*, 7(4):423–433.

[Grinold and Kahn, 2000] Grinold, R. C. and Kahn, R. N. (2000). *Active portfolio management: A Quantitative Approach for Producing Superior Returns and Controlling Risk*. McGraw Hill New York, NY.

[He and Litterman, 2002] He, G. and Litterman, R. (2002). The intuition behind Black-Litterman model portfolios. *Available at SSRN 334304*.

[He et al., 2013] He, P. W., Grant, A., and Fabre, J. (2013). Economic value of analyst recommendations in Australia: an application of the Black-Litterman asset allocation model. *Accounting & Finance*, 53(2):441–470.

[Idzorek, 2002] Idzorek, T. M. (2002). A step-by-step guide to the Black-Litterman model. *Forecasting expected returns in the financial markets*, page 17.

[León and Vela, 2011] León, C. and Vela, D. (2011). Foreign reserves strategic asset allocation. *Available at SSRN 2101222*.

[Markowitz, 1952] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1):77–91.

[Meucci, 2006] Meucci, A. (2006). Beyond Black-Litterman in practice: A five-step recipe to input views on non-normal markets. *Available at SSRN 872577*.

[Satchell and Scowcroft, 2000] Satchell, S. and Scowcroft, A. (2000). A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. *Journal of Asset Management*, 1(2):138–150.

[Segura, 2009] Segura, M. E. T. (2009). *Contrucción y gestión de portafolios con el modelo black-litterman: una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en Colombia*. PhD thesis, Uniandes.

[Walters, 2014] Walters, J. (2014). The Black-Litterman model in detail. http://www.blacklitterman.org/Black-Litterman.pdf. [Online; accessed 26 August, 2015].