

# LOGARITMOS Y EXPONENCIALES $q$ -DEFORMADOS CON APLICACIONES

Daniel Felipe Loaiza Correa



Informe de práctica investigativa II

Asesor: Dr. Gustavo Castañeda

Escuela de Ciencias y Humanidades

Departamento de Ciencias Básicas

Medellín

Noviembre 2009



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Funciones <math>q</math>-exponenciales y <math>q</math>-logarítmicas</b>	<b>3</b>
1.1. Definiciones y comportamiento general . . . . .	4
1.2. Propiedades . . . . .	6
1.3. $q$ -Transformada de Laplace . . . . .	12
1.4. $q$ -Gaussianas . . . . .	15
<b>2. Aplicaciones</b>	<b>19</b>
2.1. Parejas sexuales . . . . .	19
2.2. Producto Interno Bruto (PIB) . . . . .	20
2.3. Distribuciones Geográficas . . . . .	24
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>



# Introducción

Desde principios del siglo pasado se propuso una generalización de la función exponencial natural; una deformación de la misma. Con el desarrollo de la estadística de Tsallis, a partir de la generalización del concepto de entropía dada en 1998, en la década de los noventa se hace teoría sobre funciones exponenciales y logarítmicas deformadas. Sólo a partir del presente siglo, se plantean investigaciones donde se hacen desarrollos teóricos y aplicaciones de dichas funciones.

En estas notas que constituyen las memorias del curso práctica investigativa II, se muestra parte del potencial investigativo subyacente en la consideración de dichas funciones. Precisamente, se presentan las funciones, sus propiedades, algunas aplicaciones en teoría matemática y en diferentes contextos como en física o ciencias sociales.



# Capítulo 1

## Funciones q-exponenciales y q-logarítmicas

En esta sección vamos a presentar algunas propiedades de las funciones q-logaritmo y q-exponencial restringidas a un dominio real. La expansión analítica a un dominio complejo será abordada en la sección 4. Algunas propiedades aquí presentadas (y otras que no incluimos) pueden ser encontradas en 67, 68 y 69. Consideremos una ecuación ordinaria lineal de primer orden no homogénea

$$Y' + p(x)y = r(x) \quad (1.1)$$

Multiplicando la ecuación por el factor de integración  $\exp^{\int p(x)dx}$ , esta se transforma en una ecuación diferencial exacta, en su bien conocida solución general dada por:

$$Y(x) = C \exp^{-\int p(x)dx} + \exp^{-\int p(x)dx} \int r(x) \exp^{\int p(x)dx} dx \quad (1.2)$$

Un caso particular  $p = -1$ ,  $r = 0$  y  $y' = y$ , teniendo como solución una función exponencial. La invariancia de la derivación es una de las propiedades más significativas de la exponencial y hace una de las más bellas funciones analíticas. Algunas ecuaciones no lineales pueden ser reducidas a una forma lineal, 1.1. Es llamada ecuación de Bernoulli en homenaje a Jakob Bernoulli (1654-1705).

$$Y' + p(x)y = g(x)y^q \quad (1.3)$$

Cuyo método de solución fue encontrado por Leibniz (1646-1716) en 1696. Un cambio de variable  $u(x) = [y(x)]^{1-q}$  se reduce a la forma lineal

$$u' + (1-q)p(x)u = (1-q)g(x) \quad (1.4)$$

Y, por tanto una segunda solución general:

$$u(x) = C \exp^{-\int p(x)dx} + (1-q) \exp^{-\int p(x)dx} \int g(x) \exp^{(1-q)\int p(x)dx} dx \quad (1.5)$$

Siendo  $C$  una constante de integración. El caso particular  $p = 0$ ,  $g = 1$  corresponde a  $y' = y^q$ , la solución

$$y = [C + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \quad (1.6)$$

Impone una condición de contorno  $y(0) = 1$ , es decir que el valor de la función  $y(x)$  coincida con un valor de la exponencial en  $x = 0$  (equivalente a considerar  $Y(x)$  como una función distribución

inversa acumulada de probabilidad), obtenemos la q-exponencial  $y(x) = 1 + [(1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}$  (ver eq.1.9). Esta debe haber sido un de las primeras apariciones (aunque sea indirectamente) de la función q-exponencial. Otro presagio de q-exponencial (particularmente  $\exp_q 1$ ) y una propia definición del número  $e$ , símbolo en homenaje a Euler (1707-1783)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Recientemente esta expresión se generalizó en [74] a fin de obtener la q-exponencial utilizando el q-algebra.

## 1.1. Definiciones y comportamiento general

El q-deformado que estamos tratando están definidas por <sup>1</sup>

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (x \in \mathbb{R}_+, q \in \mathbb{R}). \quad (1.8)$$

$$\exp_q(x) \equiv e_q^x \equiv e_q(x) \equiv \begin{cases} [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}, & \text{si } [1 + (1 - q)x] > 0, \\ 0, & \text{si } [1 + (1 - q)x] \leq 0 \end{cases} \quad (x, q \in \mathbb{R}) \quad (1.9)$$

Muchas veces un función q-exponencial es escrita de una forma mas compacta como

$$[1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (1.10)$$

Siendo  $[A]_+ \equiv \max A, 0$ . Una primera observación es que las funciones tradicionales  $\ln x$  y  $e^x$  (que con esta generalización pueden ser denotadas por  $\ln_1$  y  $e_1^x$ , o  $\exp_1^x$  o también  $e_1(x)$ ) son casos particulares de las funciones q-deformadas:

$$\ln_1 x = \lim_{q \rightarrow 1+0} \ln_q x = \lim_{q \rightarrow 1-0} \ln_q x \quad (1.11)$$

$$\exp_1 x = \lim_{q \rightarrow 1+0} \exp_q x = \lim_{q \rightarrow 1-0} \exp_q x \quad (1.12)$$

También es inmediato verificar que una es la inversa de la otra:

$$\ln_q(\exp_q x) = \exp_q(\ln_q x) = x. \quad (1.13)$$

Incluso

$$\ln_q 1 = 0, \quad \exp_q 0 = 1. \quad (1.14)$$

---

<sup>1</sup>Las notaciones  $\exp_q(x)$ ,  $e_q^x$  y  $e_q(x)$  aparecen en la literatura. Se mantendrá un patron dentro de una misma sección o capítulo, pero no sera un único patron para toda la tesis.

Una q-exponencial trae en su definición un corte para  $q < 1$ , siempre que  $x \leq \frac{-1}{(1-q)}$  (soporte compacto). Este corte garantiza que su imagen sea real. En términos físicos, un corte garantiza que una probabilidad de ocupación de estados sea una función decreciente de energía: una probabilidad de un estado de energía  $E$  es proporcional a  $\exp_q(-\beta_q E)$ . Si  $q = \frac{1}{2}$ , si no hubiese un corte, la probabilidad sería creciente para  $E$ , para  $E \geq \frac{1}{(1-q)\beta_q}$ , lo que es físicamente inaceptable. Además, si no se cortan las probabilidades serían números imaginarios siempre que sea una potencia  $\frac{1}{(1-q)}$  ni siquiera para  $E > \frac{1}{(1-q)\beta_q}$ . Para  $q > 1$ ,  $\exp_q x$  diverge con  $x = \frac{1}{(q-1)}$ , y permanece divergente para  $x > \frac{1}{(1-q)}$ . También,  $\exp_q x$  es una función monótona creciente entre  $-\infty$  y  $\frac{1}{(q-1)}$  para  $q > 1$ , y entre  $\frac{-1}{(1-q)}$  y  $\infty$  para  $q < 1$ . La figura 1.1 ilustra el comportamiento de  $\exp_q x$  para algunos valores típicos de  $q$ .

En rigor no sería necesario ilustrar una función q-logaritmo, pues esta es la función inversa de la q-exponencial. Ponemos la figura 1.2 por claridad y exhaustividad.  $\ln_q x$  es una función monótona creciente para  $x > 0$ ,  $\forall q$ , y, para  $q > 1$ ,  $\ln_q x$  se aproxima asintóticamente de  $\frac{1}{(q-1)}$ . Notemos que, para  $q = 0$ , estas funciones son lineales ( $\ln_0 x = x - 1$ ;  $\exp_0 x = x + 1$ ). La Tabla 1.1 presenta una manera alternativa (en relación a la figura 1.1) de ilustrar el comportamiento de la función q-exponencial. Esta considera valores positivos de la variable independiente  $x$ , y muestra separadamente los casos de crecimiento y decrecimiento.

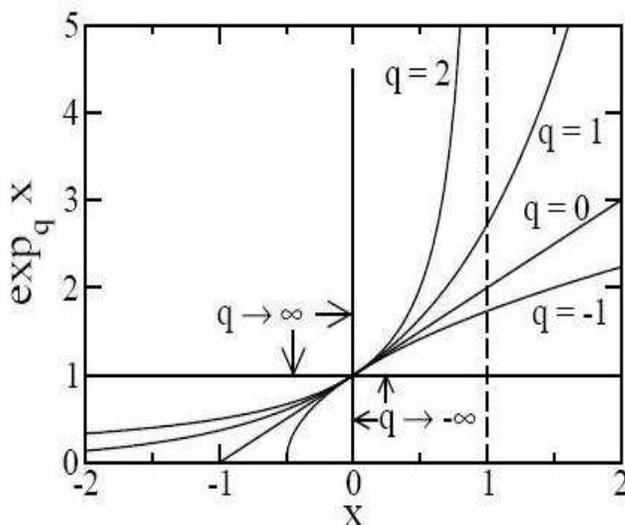


Figura 1.1: Función q-exponencial para valores típicos de  $q$ . La línea punteada vertical indica una asíntota en  $x = \frac{1}{(q-1)}$  para  $q = 2$ .

$\exp_q(ax)$ $x \geq 0$	$q > 1$	$q < 1$
$a > 0$	Monótona creciente con divergencia en $1/[a(q-1)]$	Monótona creciente sin divergencia
$a < 0$	Monótona decreciente sin corte	Monótona decreciente con corte en $1/[ a (1-q)]$

Tabla 2.1: Comportamiento de la función q-exponencial

Consideremos una situación más frecuente,  $y(x) = A \exp_q(-\beta_q x)$ , con  $x > 0$ ,  $\beta_q > 0$  ( $a = -\beta_q$  en la Tabla 1.1). Es  $q > 1$  Un comportamiento asintótico  $\sim A[(q-1)\beta_q x]^{\frac{1}{(1-q)}}$

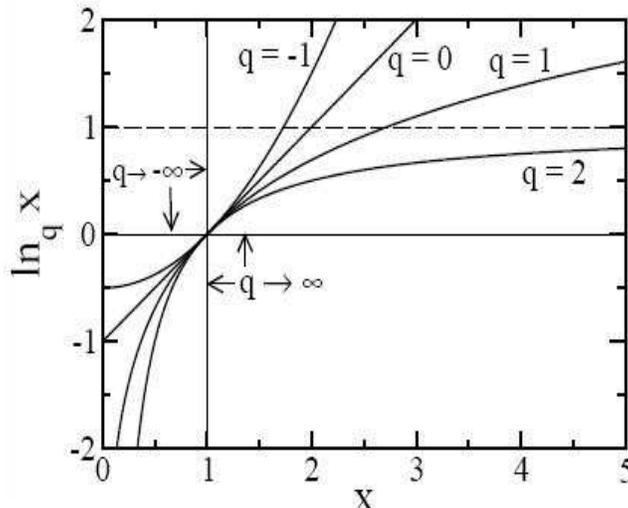


Figura 1.2: Función q-logaritmo para valores típicos de  $q$ . La línea punteada horizontal indica una asíntota en  $x = \frac{1}{(q-1)}$  para  $q = 2$ .

Es descomposición es un tipo de ley de potencia, uno de los rasgos más llamativos de la q-exponencial, En contraste con un decaimiento exponencial. La fig 1.3 ilustra este caso en un gráfico de log-log, indicando como identificar visualmente los parámetros  $A$ ,  $\beta_q$  y  $q$ . Otra manera de identificar visualmente una q-exponencial es a través de un gráfico en escala semi-q-logarítmica, que es una generalización de un gráfico semi-logarítmico(abcisa lineal, ordenada logarítmica). Una función q-exponencial aparece como una línea recta en el gráfico semi-q-log, desde que el valor de  $q$  sea el correcto. La fig 1.4 ilustra la misma función de la fig 1.3( $y(x)$  en la fig 1.3 corresponde a  $x$  en la fig 1.4). Cuando el valor de  $q$  en el gráfico semi-q-log es menor que el valor "correcto" de datos (en este caso, los valores son representados por  $A \exp_q(-\beta_q x)$ , con los mismos parámetros de la fig 1.3, es decir, un valor correcto de  $q$  en este ejemplo es 1.5), la curva aparece con una curvatura positiva; inversamente, cuando  $q > 1.5$ , la curvatura es negativa. Así que es posible identificar el valor de  $q$  (aquel que linealiza la curva). La intersección de la curva con el eje  $x = 0$  ocurre en  $y(0) = \ln_q A$ (si  $A = 1$ , ocurre en  $y(0) = 0$ ). Un valor de  $\beta_q$  puede ser observado a partir de la pendiente de la recta. Si  $A = 1$ , la pendiente coincide exactamente (en modulo) con  $\beta_q$ . En el caso general la pendiente esta dada por  $I$  (ver ecuación 1.15)

$$I = -\beta_q(1 + (1 - q) \ln_q A) \quad (1.15)$$

## 1.2. Propiedades

Diversos autores han presentado propiedades interesantes de las funciones q-logaritmo y q-exponencial (66,67,75,35,36,68,69,76). A continuación se listan algunas de ellas. Las demostraciones son inmediatas. Naturalmente todas ellas se reducen a las expresiones habituales cuando  $q \rightarrow 1$ .

1. q-logaritmo de un producto.

$$\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (1 - q) \ln_q x \ln_q y. \quad (1.16)$$

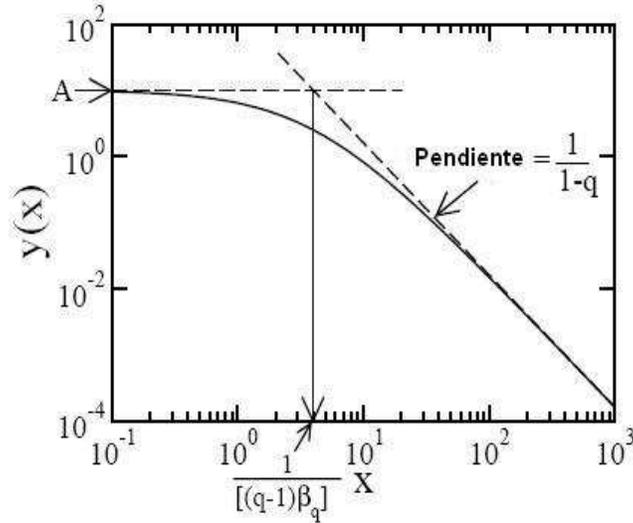


Figura 1.3: Ley de tipo cola para potencia de la función  $q$ -exponencial, representada por  $y(x) = A \exp_q(-\beta_q x)$ .  $A = 10$ ,  $\beta_q = 0.5$  y  $q = 1.5$ . La pendiente (negativa) de un sistema asintótico está dada por  $1/(1-q)$ . La intersección entre la recta horizontal en  $y = A$  y la recta de comportamiento asintótico  $A[(q-1)\beta_q x]^{1/(1-q)}$  (ambas punteadas) ocurre en  $x = 1/[(q-1)\beta_q]$ .

### Demostración

Por definición se sabe que  $\ln_q x = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}$  entonces.

$$\begin{aligned}
 \ln_q x + \ln_q y + (1-q) \ln_q x \ln_q y &= \frac{x^{1-q}-1}{1-q} + \frac{y^{1-q}-1}{1-q} + (1-q) \left[ \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \cdot \frac{y^{1-q}-1}{1-q} \right] \\
 &= \frac{x^{1-q}-1}{1-q} + \frac{y^{1-q}-1}{1-q} + \frac{(x^{1-q}-1)(y^{1-q}-1)}{1-q} = \frac{(x^{1-q}-1) + (y^{1-q}-1) + (x^{1-q}-1)(y^{1-q}-1)}{1-q} \\
 &= \frac{x^{1-q}-1 + y^{1-q}-1 + x^{1-q}y^{1-q} - x^{1-q} - y^{1-q} + 1}{1-q} \\
 &= \frac{\cancel{x^{1-q}-1} + \cancel{y^{1-q}-1} + x^{1-q}y^{1-q} - \cancel{x^{1-q}} - \cancel{y^{1-q}} + 1}{1-q} \\
 &= \frac{x^{1-q}y^{1-q} - 1}{1-q} \\
 &= \frac{x^{1-q}y^{1-q} - 1}{1-q} = \ln_q(xy)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (1-q) \ln_q x \ln_q y.$$

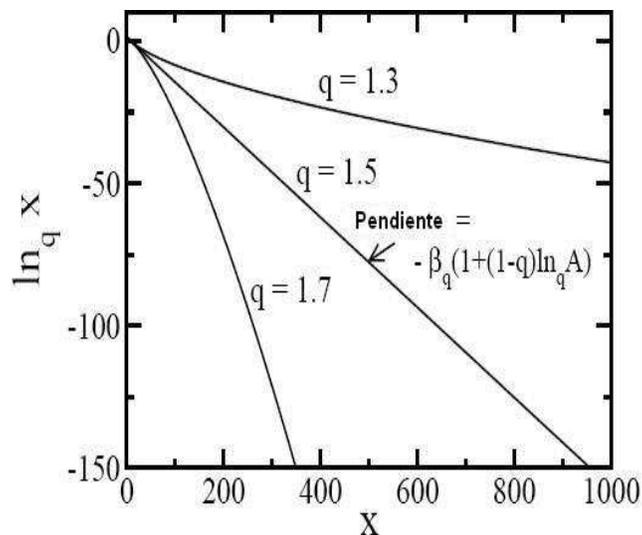


Figura 1.4: Ley de tipo cola para potencia de la función q-exponencial, representada por  $y(x) = A \exp_q(-\beta_q x)$ .  $A = 10$ ,  $\beta_q = 0.5$  y  $q = 1.5$ . La pendiente (negativa) de un sistema asintótico está dada por  $1/(1-q)$ . La intersección entre la recta horizontal en  $y = A$  y la recta de comportamiento asintótico  $A[(q-1)\beta_q x]^{1/(1-q)}$  (ambas punteadas) ocurre en  $x = 1/[(q-1)\beta_q]$ .

2. q-logaritmo de la razón.

$$\ln_q(x/y) = \frac{\ln_q x - \ln_q y}{1 + (1 - q) \ln_q y} \quad (1.17)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} \frac{\ln_q x - \ln_q y}{1 + (1 - q) \ln_q y} &= \frac{\frac{x^{1-q}-1}{1-q} - \frac{y^{1-q}-1}{1-q}}{1 + (1 - q) \frac{y^{1-q}-1}{1-q}} \\ &= \frac{\frac{(x^{1-q}-1)(1-q) - (y^{1-q}-1)(1-q)}{(1-q)^2}}{1 + (1 - q) \frac{y^{1-q}-1}{1-q}} \\ &= \frac{\frac{(x^{1-q}-1)(1-q) - (y^{1-q}-1)(1-q)}{(1-q)^2}}{\cancel{1} + (1-q) \frac{y^{1-q}-1}{(1-q)}} \\ &= \frac{\frac{(x^{1-q}-1) - (y^{1-q}-1)}{(1-q)}}{y^{1-q}} \\ &= \frac{x^{1-q} - y^{1-q}}{(1-q)y^{1-q}} \\ &= \frac{\frac{x^{1-q}}{y^{1-q}} - \frac{y^{1-q}}{y^{1-q}}}{(1-q)\frac{y^{1-q}}{y^{1-q}}} \\ &= \frac{\frac{x^{1-q}}{y^{1-q}} - 1}{(1-q)} \\ &= \frac{\frac{x^{1-q}}{y^{1-q}} - 1}{(1-q)} = \ln_q(x/y) \end{aligned}$$

Luego,

$$\ln_q(x/y) = \frac{\ln_q x - \ln_q y}{1 + (1 - q) \ln_q y}$$

En particular, el q-logaritmo para la inversa de un número  $x$  no es nulo.

$$\ln_q x^{-1} = -\frac{\ln_q x}{1 + (1 - q) \ln_q x} = -\frac{1}{x^{1-q}} \ln_q x \quad (1.18)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
-\frac{\ln_q x}{1 + (1-q)\ln_q x} &= -\frac{\frac{(x^{1-q}-1)}{(1-q)}}{1 + (1-q)\frac{x^{1-q}-1}{1-q}} \\
&= -\frac{\frac{(x^{1-q}-1)}{(1-q)}}{\cancel{1} + (1-q)\frac{x^{1-q}-1}{\cancel{1-q}}} \\
&= -\frac{\frac{(x^{1-q}-1)}{(1-q)}}{x^{1-q}} \\
&= -\frac{(x^{1-q}-1)}{(1-q)(x^{1-q})} \\
&= -\frac{1}{x^{1-q}} \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \\
&= -\frac{1}{x^{1-q}} \ln_q x
\end{aligned}$$

Luego,

$$\ln_q x^{-1} = -\frac{\ln_q x}{1+(1-q)\ln_q x} = -\frac{1}{x^{1-q}} \ln_q x$$

3. q-logaritmo de una potencia.

$$\ln_q x^a = \frac{a}{1-q} \ln_{1-a} x^{1-q} \quad (1.19)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1-q} \ln_{1-a} x^{1-q} &= \frac{a}{1-q} \frac{(x^{1-q})^{1-(1-a)} - 1}{1 - (1-a)} \\
&= \frac{\cancel{a}}{1-q} \frac{x^{(1-q)a} - 1}{\cancel{a}} \\
&= \frac{x^{(1-q)a} - 1}{1-q} \\
&= \frac{(x^a)^{1-q} - 1}{1-q} \\
&= \ln_q x^a
\end{aligned}$$

Luego,

$$\ln_q x^a = \frac{a}{1-q} \ln_{1-a} x^{1-q}$$

4. Derivada de un q-logaritmo.

$$\frac{d}{dx} \ln_q x = \frac{1}{x^q} \quad (1.20)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \ln_q x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \right) \\
&= \frac{(1-q)x^{(1-q)-1} \cdot (1-q) - \cancel{(x^{1-q} - 1) \cdot 0}}{(1-q)^2} \\
&= \frac{\cancel{(1-q)} x^{(1-q)-1} \cdot \cancel{(1-q)}}{\cancel{(1-q)}^2} \\
&= x^{-q} \\
&= \frac{1}{x^q}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{d}{dx} \ln_q x = \frac{1}{x^q}$$

5. Integral de un q-logaritmo.

$$\int \ln_q x dx = \frac{x \ln_q x - x}{2-q} \quad (1.21)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
\int \ln_q x dx &= \int \frac{(x^{1-q} - 1)}{1-q} dx \\
&= \frac{1}{1-q} \int (x^{1-q} - 1) dx \\
&= \frac{1}{1-q} \left[ \frac{x^{2-q}}{2-q} - x + c \right] \\
&= \frac{1}{1-q} \left[ \frac{x^{2-q} - x(2-q)}{2-q} \right] + c \\
&= \frac{1}{(1-q)(2-q)} \left[ x \{ x^{1-q} - 2 + q \} \right] + c \\
&= \frac{1}{(2-q)} x \left[ \frac{x^{1-q} - 1 - 1 + q}{(1-q)} \right] + c \\
&= \frac{1}{(2-q)} x \left[ \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} - \frac{\cancel{1-q}}{\cancel{1-q}} \right] + c \\
&= \frac{1}{(2-q)} x \left[ \ln_q x - 1 \right] + c \\
&= \frac{x \ln_q x - 1}{2-q} + c
\end{aligned}$$

Luego,

$$\int \ln_q x dx = \frac{x \ln_q x - 1}{2 - q}$$

Particularmente, la divergencia de  $\ln_q x$  cuando  $x \rightarrow 0$  (y  $q > 1$ ) es suficientemente suave, de modo que

$$\int_0^1 \ln_q x = \frac{-1}{2 - q} < \infty \quad (1.22)$$

### 1.3. $q$ -Transformada de Laplace

La definición usual de transformada de Laplace para una variable de valor real no negativo  $f(t)$  está dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)\exp_1(-st) dt$$

Pueden darse tres maneras de generalización de la transformada de Laplace utilizando  $q$ -exponenciales, dependiendo de las sustituciones posibles para  $\exp_1(-st)$  dadas por:

1.  $\exp_q(-st)$
2.  $(\exp_q t)^s$
3.  $(\exp_q(t))^{-s}$

Todas las posibilidades anteriores recuperan la transformada usual cuando  $q \rightarrow 1$ . Se sigue aquí la propuesta de [4], por lo cual se escogerá la opción 2 para la generalización buscada.

**Definición 1.3.1.** La  $q$ -transformada de Laplace para una función  $f(t)$ , con  $t \geq 0$ , está dada por la función

$$F_q(s) = \mathcal{L}_q\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)[\exp_q(-t)]^s dt \quad (1.23)$$

Donde  $s = \alpha + \beta i$  es un número complejo.

Para proceder con la generalización dada por 1.23 son necesarias las dos definiciones siguientes:

**Definición 1.3.2.** Sea  $f(t)$  una función definida en el intervalo  $[a, \infty)$ . Se dice que  $f(t)$  es de orden  $q$ -exponencial  $\alpha_0$ , con  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ , si existe  $M \in \mathbb{R}$ , tal que  $|\exp_q(-t)^{\alpha_0} f(t)| \leq M$

**Definición 1.3.3.** Se dice que una función  $f(t)$  definida para todo  $t \in [a, \infty)$  es continua por trozos en  $(a, \infty)$  si para todo intervalo finito  $[a, b]$  se cumple que:

1.  $f(t)$  tiene un número finito de discontinuidades en  $[a, b]$ .
2. En cada punto  $t_0$  donde  $f(t)$  presenta discontinuidad

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \quad y \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$$

existen.

Ahora puede probarse la siguiente proposición

**Proposición 1.3.1.** *Sea  $f(t)$  continua a trozos y de orden  $q$ -exponencial  $\alpha_0$  para  $0 \leq t < \infty$ . Entonces,  $F_q(s) = \mathcal{L}_q\{f(t)\}$  ( $s = \alpha + \beta i$ ) existe para  $\alpha > \alpha_0 + (q - 1)$*

**Prueba**

Para empezar, considérese la función

$$\begin{aligned} F_{(q,T)}(s) &= \int_0^T [exp_q(-t)]^s |f(t)| dt \\ &= \int_0^T [1 - (1 - q)t]^{-\frac{\alpha}{q-1}} |f(t)| dt \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que  $f(t)$  es continua por trozos en  $[0, \infty)$ ,  $f(t)$  tiene un número finito  $m$  de discontinuidades en el intervalo  $[0, T]$ . Sean  $t_1, t_2, \dots, t_m$  los valores de  $t$  donde se presentan tales discontinuidades; sea además  $t_0 = 0$ . Entonces, la última de las integrales puede escribirse como:

$$\int_0^T \left| [1 - (1 - q)t]^{-\frac{\alpha}{q-1}} \right| |f(t)| dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [1 - (1 - q)t]^{-\frac{\alpha}{q-1}} |f(t)| dt + \int_{t_m}^T [1 - (1 - q)t]^{-\frac{\alpha}{q-1}} |f(t)| dt \quad (1.24)$$

Por otro lado, como  $f(t)$  es de orden  $q$ -exponencial  $\alpha_0$ , existe  $M > 0$  tal que:

$$|f(t)| \leq M [exp(-t)]^{-\alpha_0} = M [1 - (1 - q)t]^{-\frac{\alpha_0}{q-1}} \quad (1.25)$$

Al reemplazar 1.25 en 1.24 se tiene:

$$\int_0^T \left| [1 - (1 - q)t]^{-\frac{\alpha}{q-1}} \right| |f(t)| dt \leq \sum_{i=0}^{m-1} M \int_{t_i}^{t_{i+1}} [1 - (1 - q)t]^{-\frac{\alpha - \alpha_0}{q-1}} dt + M \int_{t_m}^T [1 - (1 - q)t]^{-\frac{\alpha - \alpha_0}{q-1}} dt \quad (1.26)$$

Ahora, después de resolver las integrales del lado derecho de 1.26 y agrupar términos semejantes, se llega a:

$$F_{(q,T)}(s) \leq \frac{M}{\alpha - \alpha_0 + (1 - q)} \left[ 1 - (1 - (1 - q)T)^{1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{q-1}} \right] \quad (1.27)$$

Además, dado que  $1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{q-1} < 0$ , pues por hipótesis  $\alpha > \alpha_0 + (q - 1)$ , se concluye que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (1 - (1 - q)T)^{1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{q-1}} = 0 \quad (1.28)$$

Pero por otro lado:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_{(q,T)}(s) = F_q(s) \quad (1.29)$$

Con lo cual, si se consideran 1.27, 1.28 y 1.29, entonces:

$$F_q(s) \leq \frac{M}{\alpha - \alpha_0 + (1 - q)}$$

Con lo cual queda probada la existencia de  $F_q(s) = \mathcal{L}_q\{f(t)\}$

Al igual que en los casos anteriores, la generalización propuesta para la transformada de Laplace a partir de la función  $exp_q(x)$  permite definir propiedades para  $F_q(s)$  que se reducen a las propiedades usuales de  $F(s)$  cuando  $q \rightarrow 1$ . Algunas de estas propiedades se presentan a continuación. Los detalles de la prueba para cada propiedad pueden consultarse en [4]

### Propiedades de la $q$ -transformada

1. La inversa de  $F_q(S)$  está dada por la función:

$$\mathcal{L}_q^{-1}\{F_q(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_q(s) [\exp_q(-t)]^{-s-(1-q)} ds$$

Donde  $c$  es una constante real que supera a la parte real de todas las singularidades de  $F_q(s)$ . De la definición de  $\mathcal{L}_q^{-1}F_q(s)$  se tienen las siguientes igualdades:

$$\mathcal{L}_q^{-1}\{\mathcal{L}_q\{f(t)\}\} = f(t) \quad y \quad \mathcal{L}_q\{\mathcal{L}_q^{-1}\{F_q(s)\}\} = F_q(s)$$

2. Valores límite:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}_q\{f(t)\} = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad y \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}_q\{f(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - (1-q)t]f(t)$$

3. Linealidad:

$$\mathcal{L}_q\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}_q\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}_q\{f_2(t)\}$$

4. Cambio de escala:

$$\mathcal{L}_q\{f(at)\} = \frac{1}{a} F_{q'}\left\{\frac{s}{a}\right\}, \quad \text{con} \quad q' = 1 - \frac{1-q}{a}$$

5. Primera propiedad de traslación:

$$\mathcal{L}_q\{[\exp_q(-t)]^{-s_0} f(t)\} = F_q(s - s_0)$$

6. Segunda propiedad de traslación:

$$\mathcal{L}_q\left\{f\left(\frac{t-t_0}{1-(1-q)t_0}\right) u\left(\frac{t-t_0}{1-(1-q)t_0}\right)\right\} = [\exp_q(-t_0)]^{s-(1-q)} F_q(s)$$

Donde  $u(x)$  es la función escalón unitario de Heavside.

7.  $q$ -transformada de derivadas (orden 1 y 2)

$$\mathcal{L}_q\{f'(t)\} = s \mathcal{L}_q\left\{\frac{f(t)}{1-(1-q)t}\right\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}_q\{f''(t)\} = s(s-(1-q)) \mathcal{L}_q\left\{\frac{f(t)}{[1-(1-q)t]^2}\right\} - f'(0) - sf(0)$$

8. Derivada de  $q$ -transformada:

$$F_q'(s) = \mathcal{L}_q\{[\ln(\exp_q(-t))]f(t)\}$$

$$F_q^{(n)}(s) = \mathcal{L}_q\{[\ln^n(\exp_q(-t))]f(t)\}$$

9.  $q$ -transformada de la integral:

$$\mathcal{L}_q\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s-(q-1)} \mathcal{L}_q\{(1-(1-q)t)f(t)\}$$

10. Integral de la  $q$ -transformada

$$\int_s^\infty F_q(u) du = \mathcal{L}_q \left\{ \frac{-f(t)}{\ln[\exp_q(-t)]} \right\}$$

$$\int_s^\infty \cdots \int_s^\infty F_q(u) du^n = \mathcal{L}_q \left\{ \frac{(-1)^n f(t)}{\ln^n[\exp_q(-t)]} \right\}$$

Otras propiedades importantes de la  $q$ -transformada pueden obtenerse a partir de la generalización de la convolución de dos funciones  $f(t)$  y  $g(t)$ . La  $q$ -convolución propuesta por Tsallis y Prato [cf [4]] está dada por:

$$(f *_q g)(t) = \int_0^t f \left( \frac{t-\tau}{1-(1-q)\tau} \right) \frac{g(\tau)}{1-(1-q)\tau} d\tau \quad (1.30)$$

A partir de 1.30 se tienen las siguientes propiedades:

1. Asociativa:

$$[f *_q (g *_q h)](t) = [(f *_q g) *_q h](t)$$

2. Conmutativa:

$$(f *_q g)(t) = (g *_q f)(t)$$

3. Múltiplo escalar:

$$(c_1 f *_q g)(t) = c_1 (f *_q g)(t) \quad y \quad (f *_q c_2 g)(t) = c_2 (f *_q g)(t)$$

4. Distributiva:

$$[f *_q (g + h)](t) = (f *_q g)(t) + (f *_q h)(t)$$

5.  $q$ transformada de la convolución

$$\mathcal{L}_q\{(f *_q g)(t)\} = \mathcal{L}_q\{f(t)\} \mathcal{L}_q\{g(t)\}$$

## 1.4. $q$ -Gaussianas

La distribución normal o gaussiana es una de las distribuciones de probabilidad con mayores aplicaciones, tanto en el desarrollo del conocimiento matemático, como en diversas áreas de las ciencias básicas y humanas. Para una variable aleatoria  $X$  que distribuya normal, dicha distribución está definida mediante la expresión:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Donde, como es habitual,  $\mu$  representa el valor esperado de la variable aleatoria  $X$ , y  $\sigma$  el valor de la desviación estándar. En [3] Naudts propone una generalización de la distribución gaussiana; la propuesta de Naudts se apoya en trabajos anteriores de Tsallis, Plastino, Moyano y Hilhors; una importante referencia para el estudio detallado de la  $q$ -generalización de la distribución gaussiana

y del teorema del límite central puede ser consultada en [1]. La generalización propuesta por Naudts en [3] para la función gaussiana está dada por la distribución  $q$ -gaussiana:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{c_q \sigma} \exp_q\left(\frac{-t^2}{\sigma^2}\right) dt \quad \text{con} \quad q < 3 \quad (1.31)$$

La función de densidad de probabilidad asociada a esta distribución puede escribirse como:

$$\frac{1}{c_q \sigma} \exp_q\left(\frac{-x^2}{\sigma^2}\right) \quad (1.32)$$

Donde  $c_q$  está dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp_q(-x^2) \quad (1.33)$$

Al resolver la integral en 1.33 se tiene:

$$c_q = \sqrt{\frac{\pi}{q-1}} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \quad \text{para} \quad 1 < q < 3 \quad (1.34)$$

y

$$c_q = \sqrt{\frac{\pi}{1-q}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1-q}\right)} \quad \text{para} \quad q < 1 \quad (1.35)$$

Para el caso de la termo-estadística generalizada, la densidad de probabilidad que optimiza la entropía se escribe como:

$$f_{\beta}(x) = c(x) \exp_q(-\alpha(\beta) - \beta H(x)) \quad (1.36)$$

Donde  $H(x)$  representa el hamiltoniano de la energía,  $\beta$  es un parámetro que depende del inverso de la temperatura  $\frac{1}{T}$  y  $\alpha(\beta)$  es un parámetro que se obtiene del proceso de optimización por multiplicadores de Lagrange. Para obtener la forma  $q$ -gaussiana para 1.36 se realizan las sustituciones:

$$c(x) = \frac{1}{c_q}; \quad H(x) = x^2; \quad \beta = \sigma^{3-q}; \quad \alpha(\beta) = \ln_{2-q}(\sigma)$$

Es claro que para  $q = 1$  se obtiene la distribución normal estándar. Un camino un poco más general, aunque equivalente, es abordado por Moyano en [1]. en este caso 1.36 se escribe como:

$$f(x) = \mathcal{A}_q [1 + (q-1) \mathcal{B}_q (x - \mu_q)^2]^{-\frac{1}{1-q}}; \quad \text{para} \quad q < 3 \quad (1.37)$$

Donde la media generalizada  $\mu_q$  puede escribirse en términos de la densidad de probabilidad

$$P(x) = \frac{p(x)^q}{\int_{\Gamma} [p(x)]^q dx} \quad (1.38)$$

Como:

$$\mu_q = \int_{\Gamma} x P(x) dx \quad (1.39)$$

Las probabilidades  $P(x)$  son conocidas como *probabilidades escort* y son propuestas por Tsallis en el proceso de optimización de la entropía para el ensamble canónico. Como es usual  $\Gamma$  es el espacio de fase correspondiente al sistema y  $p(x)$  la densidad de probabilidad para los diferentes estados del sistema.

Además:

$$\mathcal{A}_q = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{q-1}\right)} \sqrt{\frac{q-1}{\pi}} \mathcal{B}_q \quad \text{para } 1 < q < 3 \quad (1.40)$$

y

$$\mathcal{A}_q = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-q}\right)} \sqrt{\frac{1-q}{\pi}} \mathcal{B}_q \quad \text{para } q < 1 \quad (1.41)$$

Con:

$$\mathcal{B}_q = [(3-q)\sigma_q^2]^{-1} = (5-3q)\sigma^2]^{-1} \quad (1.42)$$

Donde la varianza  $q$  generalizada se relaciona con la varianza usual mediante la expresión:

$$\sigma_q^2 = \frac{5-3q}{3-q} \sigma^2$$

Finalmente, 1.37 puede escribirse como la  $q$ -gaussiana:

$$f(x) = \mathcal{A}_q \exp_q(-\mathcal{B}_q(x - \mu_q)^2) \quad (1.43)$$



## Capítulo 2

# Aplicaciones

### 2.1. Parejas sexuales

Recientemente fue divulgado un estudio sobre el comportamiento sexual de un grupo aleatorio de suecos a lo largo de un año[252]. El objetivo era revelar la estructura de red del contacto sexual. El tamaño de la población la cual fue sometida al examen constaba de 4781 suecos (edades comprendidas entre 18 y 74 años) y la tasa de respuesta del cuestionario fue del 59 % que corresponde a 2810 respuestas. La Figura 2.1 muestra la distribución acumulada de la cantidad de diferentes parejas reportados en los últimos 12 meses anteriores a la encuesta. Los autores identifican una ley de potencia para los comportamientos tanto femeninos como Masculino, observando que el número de parejas denunciado por mujeres es menor que el denunciado por los hombres. Tratándose Por lo tanto de un fenómeno libre de rango, los autores llamaron la atención sobre la diferencia de las redes de amigos [253], que tiene un patrón exponencial o gaussiana, por tanto presentando así un conjunto rango típico definido. En particular, este último trabajo al que nos referimos, los autores identifican tres tipos de redes (i) las pequeñas redes del mundo (mundo pequeño): redes libres de escala (redes sin escala), con la de la del tipo cola de la ley de energía, (ii) la escala de las redes de libre truncado (escala truncado libre redes), que prevé un régimen de tipo intermedio de la ley de energía, seguido de una transición a una cola exponencial y (iii) con la escala de las redes (redes de escala única), que tienen una exponencial de la cola o de Gauss. Las redes de amistad son identificados como el tipo (III), mientras que la red de contactos sexuales, del tipo (i). Autores consideran que la escala de las redes libres (de tipo (i)) están relacionados con el modelo de unión preferencial de Barabási-Albert[224, 225]. Podemos especular aquí que un tipo (i) de redes de mundo pequeño puede ser adecuadamente descrito con  $q$ -exponenciales (o eventualmente  $q$ -Gaussiana); el tipo (ii) con  $(q,1)$ -exponencial (o su equivalente Gaussiana) y finalmente, el tipo (iii) por Gaussianas. La Figura 2.1 también representa curvas, calculadas con una  $q$ -exponencial, en la ecuación 2.1, con  $\gamma = 1$  y la normalización considerando el caso discreto,  $P(\geq 1) = 1$ , El ajuste es bastante bueno en toda la gama de datos y no solo en la cola.

$$p(x) \propto \exp_q(-\beta_q |x|^\gamma) \tag{2.1}$$

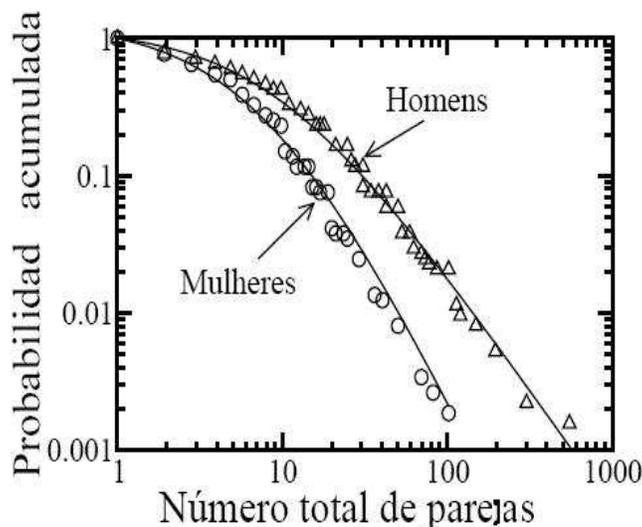


Figura 2.1: Probabilidad acumulada inversa de diferentes parejas suecas a lo largo de un año. Los círculos corresponden a las mujeres y los triángulos a los hombres. Las líneas continuas son q-exponenciales, ajustadas para el caso discreto, es decir,  $P(1) = 1$ . Los parámetros para las mujeres son  $q_F = 1.4$ ,  $1/\beta_{q_F} = 3.33$ , y para los hombres,  $q_M = 1.58$ ,  $1/\beta_{q_F} = 5.55$

## 2.2. Producto Interno Bruto (PIB)

Particularmente estamos interesados en métodos de la mecánica estadística no-extensiva y sus aplicaciones en economía. el primer trabajo que se esta haciendo es la conexión entre mercados financieros y turbulencia, dentro de un formalismo no-extensivo, la referencia ha sido [187, 188]. Un reciente artículo de revisión puede ser encontrado en [257].

Una caracterización de sistemas económicos, mas específicamente distribuciones de rendimientos personales (en inglés, personal income, abreviaremos por PI), usualmente es asumida siguiendo la ley de Pareto, analizando distribuciones de renta y riqueza de poblaciones, concluir que la probabilidad  $p(x)dx$  de un individuo tiene un rendimiento comprendido entre  $x$  y  $x + dx$  obedece a  $p(x) \propto \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ , siendo  $1 \leq \alpha \leq 2$  ( $p(x)$  es una densidad de probabilidad). Cuando mas socializada la economía, mayor valor de  $\alpha$ . Es común ver la distribución de Pareto representada por la distribución acumulada inversa,

$$P(\geq x) = \int_x^\infty p(y)dy = \frac{1}{x^\alpha} \quad (2.2)$$

donde ( $P \geq x$ ) es la probabilidad de un individuo en tener un rendimiento igual o superior a  $x$ , en una region de altos ingresos es una distribución log-normal, ( $p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\log^2(x/x_0)}{2\sigma^2}\right]$ , siendo  $x_0$  la medio y  $\sigma$  la desviación normal. Tratándose como una distribución de dos parámetros), en una region de ingresos intermedia.

Nuestra contribución [261] consiste en analizar un aspecto un poco diferente dos sistemas económicos: la distribución de ingreso personal total (PI) de las ciudades, como también el producto interno bruto (PIB) de estas ciudades para un país dado. Ambos ingreso personal total y el producto interno total, pueden ser indexados como valor agregado. Similarmente, consideramos una

distribución PIB de países del mundo. Utilizamos distribuciones pertenecientes a familias de funciones q-exponenciales, particularmente vamos a considerar q-exponenciales (o variantes) del tipo  $\exp_q(-x)$ , con  $q \geq 1$  y  $x > 0$ , este caso muestra una disminución de la cola del tipo de ley de energía, que es una que nos va a interesar. Siguiendo esa línea veremos que, en algunos casos, somos capaces de describir casi la totalidad del espectro de las distribuciones, y no solo colas con única función. Esto apunta a una visión unificada del problema (en vez de considerar una ley para la región de altos ingresos y otra ley distinta para la región de ingresos intermedios). De una cierta manera este problema se asemeja a otro, el número de citación de artículos científicos, que también presenta apenas una cola del tipo ley de energía. En un principio se conjeturó que diferentes fenómenos gobiernan los artículos más citados y los pocos citados (vide Ref. [195] y los que las contienen). Una abordaje no-extensivo del problema [196] mostró que es posible tener una única función capaz de describir todo el espectro de citaciones (volvemos a este ejemplo en la Sub-sección 8.4.5). Vamos a considerar que con  $p \equiv P$ , siendo  $P$  la distribución de probabilidad acumulada inversa,  $x = x/x_0$  la razón entre una variable económica y su valor mínimo.

En el caso discreto  $x_i \equiv x_i/x_{min}$ , donde  $x$  es una variable económica, en nuestro análisis, PI de una ciudad o el PIB de una ciudad (o país) y el índice  $min$  es la ciudad (país) más pobre (más bajo no ranking).

Analizamos un caso de distribución de PI: ciudades de Estados Unidos, para los años entre 1970 y 2000 [262]. Analizamos también tres tipos de distribución de PIB: ciudades Brasileñas (de 1970 a 1996) [263], ciudades Alemanas (de 1992 a 1998) [265] y ciudades del Reino Unido (RU) (de 1993 a 1998) [265]. Todos los casos son razonablemente bien descritos con  $\gamma = 2$ , es decir,  $(q, q')$ -Gaussianas.

La Figura 2.2 ilustra los resultados con las distribuciones inversas acumuladas (o un rank, algunas veces traducido al portugués como posto), obtenidas por el producto de  $P$  el número de ciudades. Son representadas por tres curvas en cada Fig.2.2 de (a)– (d): (i) distribución q-Gaussiana, que describe los datos de las regiones de bajos ingresos, (ii)  $(q, q')$ -Gaussiana, que se muestra capaz de reproducir la región baja y intermedia, incluyendo  $x_{q'}$  y (iii) distribución log-normal, que fue ajustada para la región intermedia. Observamos que para los EEUU y Brasil, la  $(q, q')$ -Gaussiana describe los datos en prácticamente toda la fase de variación del espectro. Ya para Alemania y Reino Unido, ambas curvas  $(q, q')$ -Gaussiana y log-normal respectivamente son capaces de describir los datos en la región baja y intermedia (las curvas son prácticamente indistinguibles visualmente en esta región). Para los EEUU y Brasil, la curva log-normal fracasa en región de bajos ingresos, lo que puede ser mejor percibido con detalles en la Fig.2.2(a) y Fig.2.2(b). Los valores de los parámetros utilizados son presentados en la Tabla.2.1

Pais	Año	$N_{ciudades}$	$q$	$q'$	$1/\sqrt{\beta_q}$	$1/\sqrt{\beta_{q'}}$	$x_0$	$\sigma$
EEUU	2000	3110	3.80	1.7	87.71	2236.07	110	7
Brasil	1996	4973	3.50	2.1	40.82	816.50	22	10
Alemania	1998	440	2.70	1.5	3.16	6.59	3.5	1.5
RU	1996	133	3.12	1.4	18.26	37.80	20	1.5

Tabla 2.1: Parámetros para las funciones de distribución, para los años representados en la Fig.2.2

Regiones de PIB grande muestran un comportamiento diferente: la distribución presenta una transición adicional, inclinándose para arriba y originando un tercer régimen en la ley de potencia. Este efecto es bastante pronunciado para Alemania, y en un grado menor para Reino Unido. Para los EEUU y Brasil, este efecto está prácticamente escondido en la distribución histogramada, conforme a la Fig.2.2 es más visible en los gráficos no histogramados. Por ejemplo, en los EEUU,

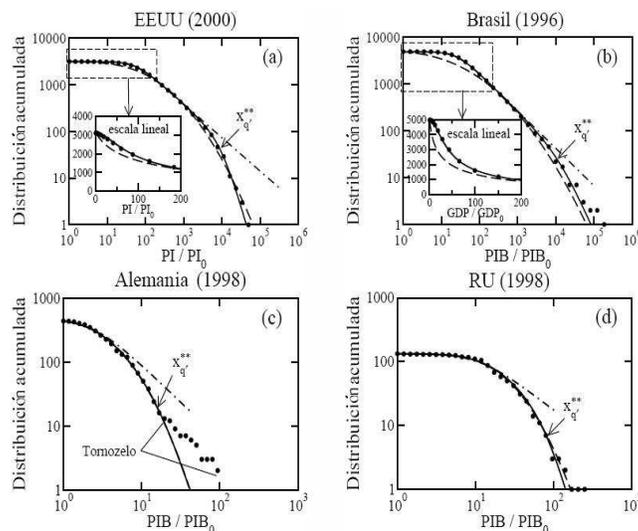


Figura 2.2: Distribución acumulada inversa *para*  $PI/PI_0$  (EEUU) y  $PIB/PIB_0$  (Brasil, Alemania y Reino Unido). Son representadas tres distribuciones para la comparación: (i)  $q$ -Gaussiana (con  $\beta'_q = 0$ ) (línea discontinua-punteada), (ii)  $(q, q')$ -Gaussiana (línea continua), y (iii) log-normal (línea discontinua). Las Figuras (a) y (b) representan detalles con escala lineal-lineal, para tornar mas evidente la cualidad de los ajustes en la region de bajo ingreso. En las Figuras (c) y (d), Las curvas  $(q, q')$ -Gaussiana y log-normal están superpuestas y son indistinguibles visualmente. Son indicadas las posiciones de las transiciones  $x_{q'}^{**}$  (joelho, dado por la Eq. (8.33)). El regimen tornozelo es prácticamente pronunciado en (c), aunque también puede estar presente en otros casos.

apenas los dos mejores ciudades (en términos del PIB)(que son los Angeles y gran parte de Chicago) pertenecen a este regimen. En Brasil tenemos a San Paulo y Rio de Janeiro dentro de este regimen. Esta característica es común en varios sistemas, algunas veces denominado *King effect*. También esta presente en ríos cósmicos altamente energéticos siendo señalado en este entorno por tornozelo(ankle)(esta notación se adopto en las figuras). Este comportamiento posiblemente esta ligado a fenómenos de no equilibrio y también lo es fuera de este enfoque. Otra posibilidad de explicar que es la estadística de los pobres(reducido numero de puntos).Llamamos la atención sobre el hecho de que el número de ciudades en los EE.UU. y Brasil es de un orden de magnitud mayor que el número de Alemania y el Reino Unido. La Fig.2.3 representa la evolución temporal del parámetro  $q$ . Los EEUU tienen un crecimiento aproximadamente uniforme de  $q$  a lo largo de 30 años. En el caso de Brasil la tendencia de crecimiento entre 1970 hasta 1990 fue quebrada de 1990 a 1996. En Alemania y Reino Unido presentan valores constantes para  $q$  en los periodos para los cual es tenemos datos disponibles. El crecimiento del parámetro  $q$  (observados para los EEUU y Brasil) indica un crecimiento de la desigualdad: si  $q$  es mayor, mas extensa es la cola, por tanto mayor la probabilidad de encontrar ciudades mas ricas que otras. El parámetro  $q'$ (para un determinado país) se mostró constante para los años observados. Los valores menores de  $q$  y  $q'$  para Alemania y Reino Unido, en comparación con los valores de los EEUU y Brasil, refleja una distribución de el valor agregado mas balanceada para estos países europeos en relación a los países americanos analizados. La relación entre las inclinaciones(asociadas a los valores de  $q$ ) es la igualdad/desigualdad no es una conclusion nueva; es conocida desde Pareto. Analizamos también la distribución de los PIB's de los países del mundo, para el año 2000. En este caso observamos que la función  $(q, q')$ -exponencial (con  $\gamma = 1$  en la ecuación 2.3) ajusta a los datos

mejor que la función  $(q, q')$ -Gaussiana (con  $\gamma = 2$ ) en la región de ingresos bajos e intermedios.

$$\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \frac{dp}{dx} = -(\beta_q - \beta_{q'})p^q - \beta_{q'}p^{q'} \quad (1 \leq q' \leq q, 0 \leq \beta_{q'} \ll \beta_q). \quad (2.3)$$

y esta dada por la siguiente función inversa:

$$x^\gamma = \frac{1}{\beta_{q'}} \left\{ \frac{p^{-(q'-1)} - 1}{q' - 1} - \frac{(\beta_q/\beta_{q'}) - 1}{1 + q - 2q'} \times [H(1; q-2q', q-q', (\beta_q/\beta_{q'})-1) - H(p; q-2q', q-q', (\beta_q/\beta_{q'})-1)] \right\}, \quad (2.4)$$

siendo

$$H(p; a, b, c) = q^{1+a} F\left(\frac{1+a}{b}, 1; \frac{1+a+b}{c}; -p^b c\right), \quad (2.5)$$

y  $F$  la función hipergeométrica. Esta distribución (la inversa de 2.4) consistentemente merece ser denominada  $(q, q')$ -exponencial aumentada, y es una generalización de todos los casos anteriores. Es especie de superposición entre dos  $q$ -exponenciales, con valores distintos del índice entrópico  $q$ .

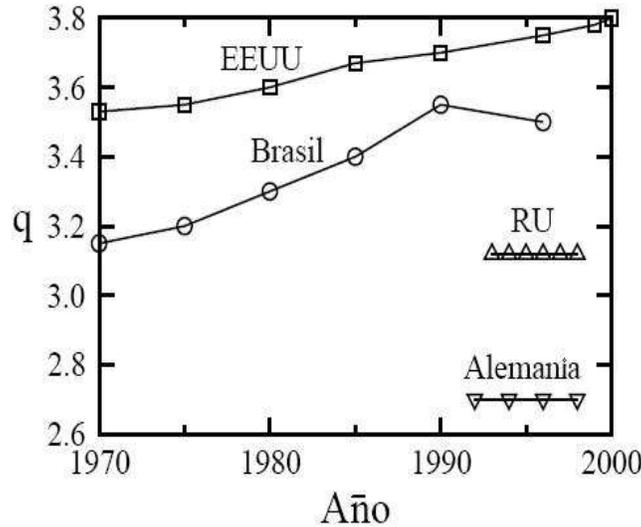


Figura 2.3: Evolución de los parámetros  $q$  para los EEUU(cuadros), Brasil(círculos) y Alemania(triángulos invertidos). Los parámetros  $q'$  (para cada país) son constantes para todos los años:  $q'_{Brasil} = 2.1$ ,  $q'_{EEUU} = 1.7$ ,  $q'_{Alemania} = 1.5$  y  $q'_{RU} = 1.4$ . Las líneas son solo guías para los ojos.

Aunque la diferencia entre las dos funciones ( $\gamma = 1$  y  $\gamma = 2$ ) es notable, no es tan grande, por lo que esta observación puramente terminológica merece más investigación, por lo que los resultados pueden ser corroboradas o no. Puede alguien confirmar que una posible interpretación para  $\gamma = 1$ , podría ser debido a la naturaleza de las interacciones entre los países, que se imaginan ser diferentes de las que existen entre las ciudades dentro de un país. La Fig.2.4 muestra los resultados. El *King effect* también está presente aquí, particularmente para los dos países de mayor PIB, EEUU y Japón.

### 2.3. Distribuciones Geográficas

En esta sección se mostrara ejemplos de distribuciones relacionadas con distribuciones geográficas. Específicamente se abordara áreas de ciudades (ejemplificados con ciudades Brasileras) y precios de las tierras negociadas en Japón.

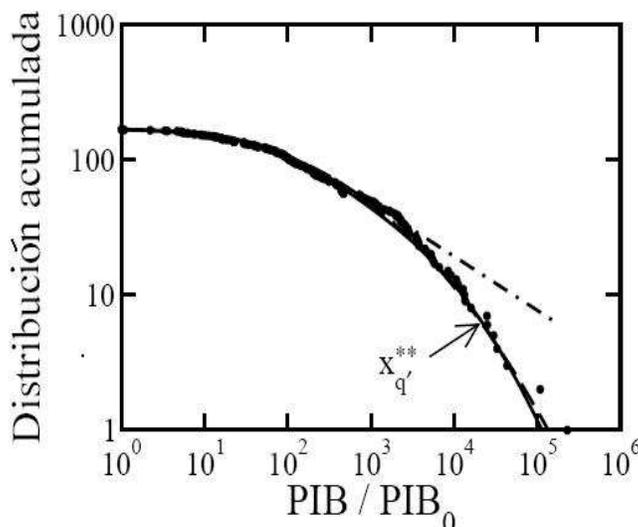


Figura 2.4: Distribución acumulada inversa de  $PIB/PIB_0$  de 167 países para el año 2000 (los datos son histogramados: cada punto corresponde a un país). Los datos fueron ajustados a una  $(q, q')$ -exponencial (línea continua) y la distribución log-normal (línea discontinua) ambas curvas no se distinguen visualmente en este ejemplo. La  $q$ -exponencial (con  $\beta_{q'} = 0$ , línea discontinua-punteada) también es presentada, para comparación. Los valores de los parámetros son  $q = 3.5$ ,  $q' = 1.7$ ,  $1/\beta_q = 111.1$  y  $1/\beta_{q'} = 2500.0$ . O joelho de acuerdo con la ecuación 2.6, y localizado en  $PIB/PIB_0 = 19665$ . La curva log-normal es obtenida con  $x_0 = 220$  y  $\sigma = 13$

$$x_{q'}^{**\gamma} = \frac{[(q-1)\beta_q]^{\frac{q'-1}{q-q'}}}{[(q'-1)\beta_{q'}]^{\frac{q-1}{q-q'}}} \quad (2.6)$$

**Áreas de la ciudades** Consideremos el área de todas las ciudades Brasileras del año 1998. La menor de ellas es Santa Cruz de Minas (MG), tiene  $2,9 \text{ Km}^2$ , en cuanto a mayor área, Altamira (PA), tiene  $161446 \text{ Km}^2$ . Tratandose de una variación significativa. Solo para tener una idea comparativa, Altamira es mas grande que doce ciudades Brasileras; es un poco mayor que Acre y un poco menor que Paraná. Mas grande tambien que países como Australia, Portugal, Grecia, Bulgaria. Son muchas las causas que llevan a una ciudad a tener cierta área, incluyendo dentro de otros factores geográficos, políticos, demográficos, economicos. A pesar de esta complejidad de influencias, es interesante observar que una única curva, la  $(q, q')$ -Gaussiana (dada por la solución de la ecuación 2.3 con  $\gamma = 2$ ), se ajusta bastante bien practicamente en todos los municipios Brasileros (5507 ciudades en el año 1998), desde la mas pequeña de ellas hasta la más grande. La Fig.2.5 ilustra los resultados.

#### Precios de tierras en Japón

El problema de los precios de las tierras en Japon fue recientemente considerado. El autor

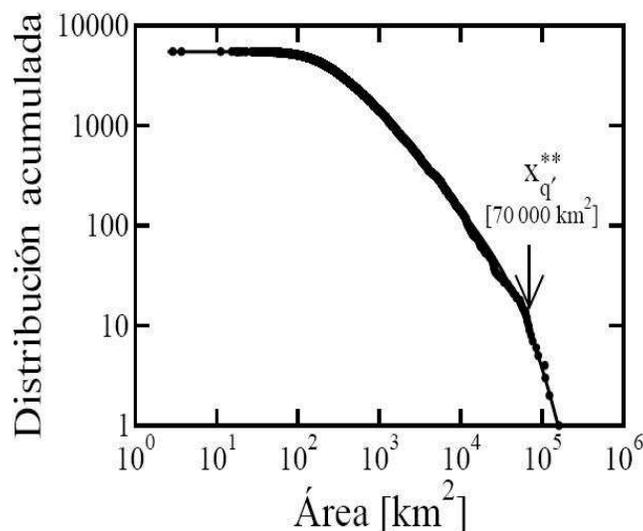


Figura 2.5: Distribución acumulada inversa de áreas de las ciudades Brasileiras (datos no histogramados). La línea continua es una  $(q, q')$ -Gaussiana con  $q = 3.07$ ,  $q' = 1.56$ ,  $1/\sqrt{\beta_q} = 353.55 \text{ Km}^2$ ,  $1/\sqrt{\beta_q'} = 11226.7 \text{ Km}^2$ .

encuentro un a cola en la ley de energía para la distribución acumulada de precios de las tierras, con una inclinación de  $-1.7(P(X \geq x) \propto x^{-1.7})$ . La Fig.2.6 evidencia que una  $q$ -Gaussiana (ecuación 2.1, con  $\gamma = 2$ ) ajusta la gama completa de datos, excepto el último punto correspondiente a los puntos mas altos. Llamamos la atención que la distribución de la probabilidades de esta histogramada. Talvez con los datos originales ( un total de 30600 puntos) es posible hacer el ajuste de la curva a este punto final(o a los puntos finales de la cola)a través de la ecuación con transición para una cola exponencial, (ecuaciones 2.7 y 2.8), y entonces a través de la ecuación con transición para un segundo regimen en la ley de energía, (ecuaciones 2.3 y 2.4)

$$\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \frac{dp}{dx} = -(\beta_q - \beta_1)p^q - \beta_1 p \quad (q \geq 1, 0 \leq \beta_1 \ll \beta_q). \quad (2.7)$$

Esta es una forma de la ecuación de Bernoulli con  $p(x) = \beta_1$  y  $g(x) = -(\beta_q - \beta_1)$ .

$$p(x) = \left[ 1 - \frac{\beta_q}{\beta_1} + \frac{\beta_q}{\beta_1} e^{(q-1)\beta_1 x^\gamma} \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.8)$$

Esta podemos adecuadamente denominarla  $(q, 1)$ -exponencial aumentada. Es inmediato verificar que  $q = 1$ , o  $\beta_q = 0$  la reduce a el caso usual de las exponenciales aumentadas, donde el método variacional origina formas exponenciales,

$$p(x) \propto \exp(-\beta |x|^\gamma), \quad (2.9)$$

Siendo  $\beta$  el multiplicador de Lagrange.  $\gamma = 1$  origina las funciones exponenciales usuales,  $\gamma = 2$  origina las Gaussianas. Para valores de  $\gamma$  arbitrarios, tenemos las exponenciales aumentadas. Ahora: las distribuciones exponenciales aumentadas obedecen a la siguiente ecuación

$$\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \frac{dp}{dx} = -\beta p. \quad (2.10)$$

Una manera bastante fácil de generalizar esta ecuación es

$$\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \frac{dp}{dx} = -\beta_q p^q \quad (q \geq 1), \quad (2.11)$$

cuya solución es  $p(x) \propto \exp_q(-\beta_q x^\gamma)$ .

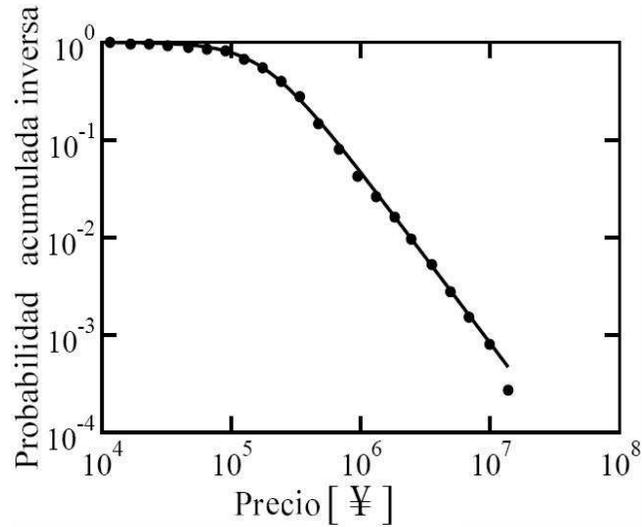


Figura 2.6: Distribución acumulada inversa de los precios de las tierras en Japón, para el año 1998. La línea continua es un  $q$ -Gaussiana con  $q = 2.136$ , que corresponde a la pendiente  $-1.76$ , y  $1/\sqrt{\beta_q} = 188982$  Yen.

# Bibliografía

- [1] Moyano, L.: *Mecânica estatística não-extensiva em sistemas complexos: fundamentos dinâmicos e aplicações*. Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro (2006)
- [2] Naudts, J.: *Estimators, escort probabilities, and  $\phi$ -exponential families in statical physics*. Journal of inequalities in pure and applied Mathematics., Vol. 5., Article 102, (2004). pp., 1-15.
- [3] Naudts, J.: *The  $q$ -exponential family in statistical physics*. Central European Journal of Physics., Vol. 7.,Number3., (2009). pp., 405-413.
- [4] Pinheiro, E.: *Manifestações dinâmicas e termodinâmicas de sistemas não-extensivos*. Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro (2004)