Análisis, Descripción y Simulación de Modelos Estocásticos de Tasas de Interés

---

Una acercamiento desde las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

J. Sebastián Palacio Montoya

Noviembre /2009

Asesor: Freddy Marín Sánchez

Profesor Departamento de Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD EAFIT
MEDELLIN

1. Introducción

Los estudios acerca de los modelos de tasas de interés tienen una gran cantidad de aplicaciones en los campos económico, financiero, energético, productivo, entre otros. El descubrir la estructura que determina el comportamiento de las tasas de interés permite realizar análisis de una manera más eficiente, conociendo los potenciales y limitaciones los modelos desarrollados.

Muchos modelos, tanto en el campo discreto como en el campo continuo, han sido propuestos para modelar el comportamiento de las tasas de interés, algunas veces partiendo de conocimientos *a priori* y algunas otras veces utilizando metodologías que permitan inferir particularidades del proceso. Los modelos de series de tiempo (en desarrollos discretos) y las ecuaciones diferenciales estocásticas (en los casos continuos) han sido dos de las metodologías más usadas tanto en la modelación como en el análisis de los procesos de tasas de interés. En este trabajo se presentan diferentes modelos teniendo como base las ecuaciones diferenciales estocásticas, aunque muchos de los análisis relacionados con ellos se desarrollen en el campo discreto, como se verá más adelante.

Los modelos que se estudiarán tienen como principal componente una estructura de reversión, pues son estos los modelos que tradicionalmente han sido utilizados para intentar explicar el comportamiento de las series de tasas de interés en las cuales la *presencia de ciertas leyes económicas* hace imposible evidenciar un comportamiento de crecimiento o decrecimiento infinito.

El presente trabajo está diseñado de la siguiente manera: En la sección dos se presentan diferentes modelos estocásticos que históricamente se han utilizado en la representación de de tasas de interés, se realiza una breve caracterización de ellos y se plantea un modelo general, el cual permitirá simplificar diferentes procedimientos que se desarrollan con posterioridad. La sección tres está dedicada a la estimación de los parámetros presentes en los diferentes procesos, para lo cual se discuten los procesos de estimación por mínimos cuadrados y de estimación por *Máxima Verosimilitud*, permitiendo determinar estimadores para los parámetros presentes en el modelo general introducido en la sección dos. Adicionalmente se presentan ejemplos aplicados a modelos específicos. En la sección cuatro describen con mayor detalle propiedades estadísticas de los modelos de tasas de interés, como lo son las características distribucionales, las soluciones exactas a las ecuaciones diferenciales y su comportamiento en el largo plazo. Posteriormente se presentan algunos cuestionamientos respecto al comportamiento esperado futuro que puede estar presente en la evolución de una realización particular de los diferentes procesos estocásticos estudiados. Por último se indican algunas conclusiones relevantes y se presenta un plan de acción futuro.

2. Modelos de tasas de interés

Los modelos que se discutirán en esta sección no son modelos exclusivos del campo financiero ni específicos para la modelación del comportamiento de las tasas de interés. Los procesos estocásticos, sobre todo aquellos derivados del movimiento browniano, se han empleado en la modelación de diferentes fenómenos económicos, financieros, productivos, entre otros, evidenciándose una especial atención en lo referente a las tasas de interés, en gran medida como resultado de avances matemáticos que permiten un tratamiento más sencillo de los modelos propuestos.

Los primeros modelos que fueron especificados para representar las series de tasas de interés fueron los de la década de 1970's, entre los que se encuentran el modelo de Merton (1973), el Movimiento Browniano Geométrico (1973), el modelo de Vasicek (1977) y el modelo de Dothan (1978). Posteriormente se presentaría el modelo de Brennan-Shwartz (1980), los modelos de activos de tasa variable y de la raíz cuadrada de Ross, Ingersoll y Ross (1980 y 1985) y el modelo exponencial de Vasicek, entre otros. Todos los modelos anteriores tienen en su formulación la asignación de parámetros constantes, es decir, parámetros que no varían como funciones del tiempo o del nivel de la tasas de interés. Modelos posteriores fueron propuestos principalmente por Hull & White en los cuales a los parámetros que aparecían en los modelos precedentes se les permite variar en el tiempo, dichos modelos se conocen como *modelos extendidos de Hull-White para tasas de interés* [1] . En la Tabla 1 es presentada la especificación de cada uno de los anteriores modelos de tasas de interés.

Tabla 1: Especificación de los modelos de niveles

Merton (1973)	$dr_t = \alpha dt + \sigma dB_t$
MBG (1973)	$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t dB_t$
Vasicek (1977)	$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dB_t$
Dothan (1978)	$dr_t = \sigma r_t dB_t$
Brennan-Shwartz (1980)	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t dB_t$
CIR VR (1980)	$dr_t = \sigma r_t^{3/2} dB_t$
CIR SR (1985)	$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t} dB_t$
CEV (1983)	$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t^{\gamma} dB_t$
Exponencial Vasicek	$dr_t = \alpha(\mu - \log(r_t))r_t dt + \sigma r_t dB_t$

MBG : Modelo del Movimiento Browniano Geométrico
CIR VR : Modelo de activos de Tasa variable
CIR SR : Modelo de la Raíz Cuadrada
CEV : Modelo de Elasticidad de la varianza

En los modelos de la Tabla1 B_t representa un movimiento browniano ([1] [6] y [8]). Las características principales de este proceso están dadas por:

- Distribución Normal: $B_t \sim \sqrt{t}\, N(0,1) \equiv N(0,t)$
- Sus posibles *trayectorias son funciones continuas* en todo punto y no diferenciables en ninguno de ellos.
- Incrementos independientes: Si $t_0 < t_1 < t_2$ entonces $B_{t_1} - B_{t_0}$ es independiente de $B_{t_2} - B_{t_1}$.
- Incrementos estacionarios: Si $s < t$ entonces $B_t - B_s \sim B_{t-s} \sim N(0, t-s)$

Los modelos referidos anteriormente hacen parte de los denominados modelos de niveles, en los cuales debido a que los parámetros son constantes, la volatilidad está restringida a ser una función solamente de los niveles de la tasa de interés. Por otro lado, y debido a las mismas condiciones sobre los parámetros, dichos modelos son llamados modelos de un sólo factor, pues no es necesario definir procesos adicionales para la especificación completa del comportamiento de la tasa.

Características generales de los modelos de niveles:

Varios de los modelos anteriores están caracterizados por tener incrementos dominados por distribuciones normales, tal es el caso de los modelos de Merton, Vasicek, Brennan-Shwartz y el Modelo de Elasticidad de la varianza (con $\gamma = 0$). De esta característica se deriva la posibilidad que tienen estos modelos de permitir que los niveles de las tasas de interés experimenten niveles negativos, lo cual es irrazonable desde el punto de vista económico.

Otras de las características que presentan los modelos de Merton y Vasicek es que poseen volatilidad aditiva, esto es, el término de elasticidad de varianza es cero ($\gamma = 0$), haciendo que la volatilidad sea independiente de los niveles las tasas de interés. En el sentido contrario, una característica relevante es también la que evidencian los modelos en los cuales el ruido es proporcional ($\gamma = 1$), pues en estos la volatilidad implícita es escalada por los niveles *actuales* de las tasas de interés, incrementando o disminuyendo la volatilidad en el tiempo, según el comportamiento evidenciado en la trayectoria particular. En general, el modelo CEV está caracterizado (según estudios empíricos) porque el término de elasticidad de la varianza es positivo ($\gamma > 0$), indicando que la volatilidad depende positivamente de los niveles de las tasas de interés, esto es, los procesos deben estar en presencia de una mayor volatilidad en los periodos de tasas altas que en aquellos periodos en los que las tasas son bajas. Aunque lo anterior parece lógico, no es lo que siempre se da en el mercado, sin embargo los modelos especificados permiten una amplia gama de posibilidades en la formulación de modelos de tasas de interés.

Caso particular resulta ser el modelo CIR SR, en el cual $\gamma = 1/2$. Este es un modelo no-lineal con el que se elimina (bajo determinadas condiciones en los parámetros) la probabilidad de tasas de interés negativas presentes en modelos como el de Merton, manteniendo la relación positiva entre la volatilidad y las tasas, como se explicó antes.

Por último, una característica que debe ser recalcada es que varios de los modelos anteriores (y otros modelos diferentes para las tasas de interés) experimentan un comportamiento de reversión a la media, lo cual parece ser razonablemente aceptable desde el punto de vista económico [5] .

Con el objetivo de capturar las características anteriores en una sola estructura, se presenta un modelo más general, el cual permite hacer descripciones de una manera sencilla y definir varias propiedades que no dependan de las características particulares de los modelos sino que dependen de la estructura misma de los modelos de tasas de interés. El *modelo general*, base del presente estudio, es presentado en la ecuación (1).

$$dr_t = \alpha\big(\mu - g(r_t)\big)r_t^{\varepsilon}dt + \sigma f(r_t)dB_t \tag{1}$$

En el modelo anterior los parámetros $\alpha, \mu\ y\ \sigma$ son constantes y generalmente positivos. Adicionalmente suele tenerse que $\varepsilon = -1, 0, 1$, $g(x) = x$, $g(x) = -x$ ó $g(x) = \log(x)$ y $f(x) = x^{\gamma}$, donde de nuevo γ representa la elasticidad de la varianza con valores típicos como $\gamma = 0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5$. Como es usual B_t representa un movimiento Browniano estándar unidimensional.

El modelo anterior tiene como estructura básica un comportamiento de reversión, además permite representar una gran diversidad de modelos, tanto los presentados anteriormente como otros mucho más generales que capturen otras características propias de la evolución de las tasas de interés.

Debido a que el comportamiento de reversión es una de las características más relevantes en el presente trabajo, en la Figura 1 se presenta el comportamiento típico de los proceso de reversión bajo diferentes condiciones de ε y γ.

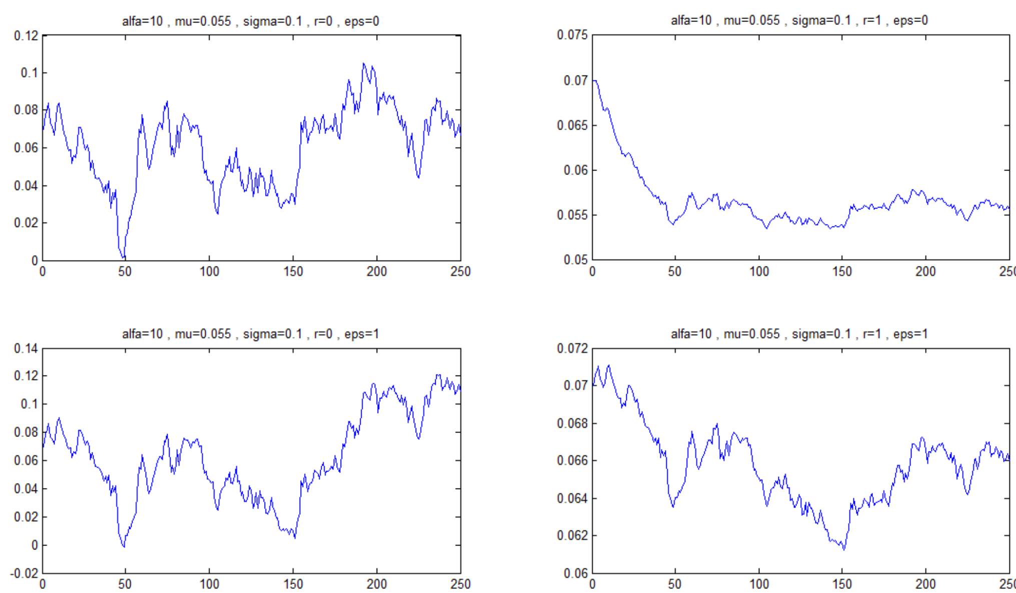

Figura 1: Comportamiento general de procesos de reversión a la media

En las trayectorias superior izquierda e inferior izquierda de la Figura 1 se muestra el comportamiento de procesos con ruido aditivo, en los cuales se tiene la presencia o ausencia de un término amplificador de la tendencia en términos de los actuales niveles del proceso.

Por otro lado, las gráficas del lado derecho de la Figura 1 muestran un comportamiento de los procesos de reversión en los cuales el ruido presente es proporcional, de donde se sigue que tanto la tendencia como la volatilidad se ven afectadas por los niveles de las tasas de interés. Estos modelos presentan una notable diferencia respecto a los modelos de ruido aditivo, pues en este caso la magnitud de la componente aleatoria depende de los niveles en que se encuentre la tasa de interés, los cuales al ser (generalmente) menores que uno tienden a reducir el efecto directo que trae consigo la volatilidad del proceso. Es así como los rangos en los cuales se mueven los procesos cambian notoriamente al considerar ruido aditivo o ruido proporcional en la modelación de procesos de tasas de interés.

Hasta ahora se han caracterizado de una manera global diferentes modelos de tasas de interés, teniendo como base el modelo general (1). En la siguiente sección se describirá el proceso de estimación de parámetros de los modelos de tasas de interés que se introdujeron en la presente sección.

3. Estimación de parámetros

El proceso de estimación de parámetros en un modelo estocástico permite conocer características adicionales que la estructura por sí misma no es capaz de capturar. La importancia implícita que posee la estimación de parámetros recae en el hecho de que en la mayoría de las aplicaciones reales los parámetros no pueden ser establecidos a priori, teniendo que ser inferidos a partir de un comportamiento histórico de las series temporales analizadas.

En esta sección se discutirán dos alternativas (equivalentes [9]) para la estimación de los parámetros presentes en el modelo general (1) bajo la condición de que sólo se conoce una realización del proceso particular analizado. Las dos metodologías presentadas son la de Mínimos cuadrados y la de Máxima Verosimilitud.

Antes de desarrollar el proceso para el caso general, supongamos el caso particular del modelo de Merton $dr_t = \alpha dt + \sigma dB_t$. El proceso que se llevará a cabo a continuación es el siguiente:

- Discretizar la ecuación diferencial estocástica utilizando diferencias de primer orden.
- Definir una nueva variable que capture el conocimiento distribucional de la discretización.
- Utilizar el método de ***mínimos cuadrados*** para la estimación de los parámetros presentes en el modelo.

Consideremos el modelo dado por $dr_t = \alpha dt + \sigma dB_t$. Al tomar la discretización de primeras diferencias por el método de Euler[1] en un periodo de tiempo T y utilizando las propiedades del movimiento browniano obtenemos

$$r_t - r_{t-1} = \alpha\Delta t + \sigma\Delta B_t = \alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\epsilon_t \quad con\ \epsilon_t \sim N(0,1) \quad y \quad \Delta t = \frac{\mathrm{T}}{n} \tag{2}$$

Si definimos $X_t = r_t - r_{t-1}$ para $t = 1, 2, \ldots, n$, tenemos entonces que $X_t \sim N(\alpha\Delta t, \sigma^2\Delta t)$. De lo anterior es posible probar que los estimadores por mínimos cuadrados para los parámetros del modelo de Merton están dados por

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n\,\Delta t}\sum_{t=1}^{n} X_t \qquad y \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\,\Delta t}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \hat{\alpha}\Delta t)^2$$

Consideremos ahora el modelo de Vasicek $dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dB_t$. Al realizar el mismo procedimiento que el descrito para el modelo de Merton se obtiene lo siguiente:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha(\mu - r_{t-1})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\epsilon_t \quad con\ \epsilon_t \sim N(0,1) \quad y \quad \Delta t = \frac{\mathrm{T}}{n} \tag{3}$$

Reescribiendo (3)

$$r_t = \alpha\mu\Delta t + (1 - \alpha\Delta t)r_{t-1} + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\epsilon_t \quad con\ \epsilon_t \sim N(0,1) \quad y \quad \Delta t = \frac{\mathrm{T}}{n} \tag{4}$$

O de manera equivalente

$$r_t = \beta + \theta r_{t-1} + \varepsilon_t \quad con\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2\Delta t) \quad y \quad \Delta t = \frac{\mathrm{T}}{n}$$

Luego, utilizando mínimos cuadrados (o de manera equivalente una regresión lineal para este caso), tenemos que los estimadores para $\beta\ y\ \theta$ están dados por

$$\hat{\beta} = \frac{(\sum_{t=1}^{n} r_t)(\sum_{t=1}^{n} r_{t-1}^2) - (\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1})(\sum_{t=1}^{n} r_{t-1})}{n(\sum_{t=1}^{n} r_{t-1}^2) - (\sum_{t=1}^{n} r_{t-1})^2} \qquad y$$

$$\hat{\theta} = \frac{n(\sum_{t=1}^{n} r_t r_{t-1}) - (\sum_{t=1}^{n} r_{t-1})(\sum_{t=1}^{n} r_t)}{n(\sum_{t=1}^{n} r_{t-1}^2) - (\sum_{t=1}^{n} r_{t-1})^2}$$

De las estimaciones anteriores es factible encontrar $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\mu}$, de manera que para la estimación de σ basta con tomar la desviación de los residuales del modelo lineal (4), es decir,

[1] El método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias puede ser extendido para el caso de las ecuaciones diferenciales estocásticas (aleatorias) proporcionando, de manera general, soluciones numéricas convergentes a las correspondientes soluciones teóricas [2] y [3] .

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\,\Delta t}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \hat{\alpha}\hat{\mu}\Delta t + (1-\hat{\alpha}\Delta t)r_{t-1})^2$$

Hasta ahora se ha expuesto la técnica de estimación de los parámetros por mínimos cuadrados para los modelos de Merton y Vasicek. Como se puedo apreciar, la estimación en el modelo de Vasicek presenta detalles que no estaban presentes en el procedimiento necesario para el modelo de Merton.

Como lo supone el ejemplo anterior, existen características de cada modelo que influyen en la estimación de los parámetros. El tratar la estimación a partir del modelo general (1) presenta ventajas en el sentido de que aunque al parecer puede ser más difícil la estimación de los parámetros directamente del modelo, los parámetros no dependerán de las especificaciones particulares que se deseen realizar.

Para la estimación de los parámetros del modelo general se utilizará la técnica de ***máxima verosimilitud***, con la cual dada una realización de un modelo y la especificación del modelo en términos de parámetros, lo que pretende es determinar cuáles son los parámetros que hacen más probable la materialización de dicha realización a partir de la estructura del modelo. Los pasos que definen esta estrategia de estimación son los siguientes:

- Discretización de la ecuación diferencial estocástica general por el método de Euler
- Capturar el comportamiento distribucional en una nueva variable
- Definir la función de verosimilitud
- Maximizar la función de verosimilitud en términos de los parámetros

La discretización del modelo general, utilizando de manera apropiada las características del movimiento browniano, está dada por

$$r_t - r_{t-1} = \alpha\big(\mu - g(r_{t-1})\big)r_{t-1}^{\varepsilon}\Delta t + \sigma f(r_{t-1})\sqrt{\Delta t}\,\epsilon_t \quad con\;\; \epsilon_t \sim N(0,1) \qquad (5)$$

Es posible entonces definir una nueva variable que capture el comportamiento aleatorio presente en (5) de la siguiente manera

$$X_t = \frac{r_t - r_{t-1} - \alpha\big(\mu - g(r_{t-1})\big)r_{t-1}^{\varepsilon}\Delta t}{f(r_{t-1})} = \sigma\sqrt{\Delta t}\,\epsilon_t \sim N(0,\sigma^2\Delta t), \qquad para\; t = 1, 2, \ldots, n$$

Luego, para cada X_t es posible definir una f.d.p de forma que para *t = 1, 2,…, n* se tiene

$$f(X_t;\alpha,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}}\exp\left(-\frac{X_t^2}{2\sigma^2\Delta t}\right)$$

Con lo cual la función de verosimilitud para los parámetros está dada por

$$L(\alpha,\mu,\sigma;X_1,X_2,\ldots,X_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2\Delta t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\Delta t}\sum_{t=1}^{n}X_t^2\right)$$

El objetivo es encontrar los parámetros que hacen máximo el valor de la función de verosimilitud, o equivalentemente el logaritmo natural de la función de verosimilitud, que está definido como

$$G(\alpha,\mu,\sigma;X_1,X_2,\dots,X_n)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2\Delta t)-\frac{1}{2\sigma^2\Delta t}\sum_{t=1}^{n}X_t^2 \qquad (6)$$

Utilizando las condiciones de primer orden, es decir $\nabla G=\vec{0}$, se tiene que los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros del modelo general son los que se encuentran al solucionar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum\nolimits_{t=1}^{n}X_t^2(\hat{\alpha},\hat{\mu})=n\Delta t\hat{\sigma}^2$$

$$A-E-\hat{\alpha}\hat{\mu}\Delta tB^*+\hat{\alpha}\Delta tE^*=0$$

$$C-B-\hat{\alpha}\hat{\mu}\Delta tD+\hat{\alpha}\Delta tB^*=0$$

Donde

$$A=\sum\nolimits_{t=1}^{n}\left(\frac{r_t r_{t-1}^s g(r_{t-1})}{f(r_{t-1})^2}\right),\qquad B=\sum\nolimits_{t=1}^{n}\left(\frac{r_{t-1}r_{t-1}^s}{f(r_{t-1})^2}\right),\qquad B^*=\sum\nolimits_{t=1}^{n}\left(\frac{r_{t-1}^{2s}g(r_{t-1})}{f(r_{t-1})^2}\right)$$

$$C=\sum\nolimits_{t=1}^{n}\left(\frac{r_t r_{t-1}^s}{f(r_{t-1})^2}\right),\qquad D=\sum\nolimits_{t=1}^{n}\left(\frac{r_{t-1}^{2s}}{f(r_{t-1})^2}\right),\qquad E=\sum\nolimits_{t=1}^{n}\left(\frac{r_{t-1}r_{t-1}^s g(r_{t-1})}{f(r_{t-1})^2}\right)$$

$$E^*=\sum\nolimits_{t=1}^{n}\left(\frac{r_{t-1}^{2s}g(r_{t-1})^2}{f(r_{t-1})^2}\right)$$

El anterior es un sistema de ecuaciones acopladas para los parámetros $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\mu}$, mientras que la tercera ecuación, definida para $\hat{\sigma}$, puede verse como una ecuación independiente pero que depende de los valores estimados de $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\mu}$. La solución a este sistema de ecuaciones arroja los siguientes estimadores:

$$\hat{\alpha}=\frac{ED-BB^*-AD-B^*C}{\left(E^*D-B^{*2}\right)\Delta t}$$

$$\hat{\mu}=\frac{E^*C-AB^*+E(B^*-B)}{ED-BB^*-AD+B^*C}$$

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{n\Delta t}\sum\nolimits_{t=1}^{n}\left(X_t(\hat{\alpha},\hat{\mu})\right)^2$$

Los parámetros así encontrados poseen las características de los estimadores de máxima verosimilitud, lo cual significa que dichos parámetros poseen una distribución asintóticamente normal y convergen a los parámetros verdaderos del proceso discretizado a medida que el número de observaciones del proceso tiende a infinito ($n \to \infty$). Algunas características de los sesgos presentes en los parámetros estimados son estudiadas con más detalle en [9]

Una de las ventajas que presenta este tratamiento analítico es que es posible encontrar una solución explícita para los parámetros, en contraste con metodologías de aproximaciones numéricas como lo son los métodos unidimensionales de optimización o en general los métodos Quasi-Newton para la optimización multidimensional [4] .

Algunos resultados del proceso de estimación se resumen en la Tabla 2. Estos resultados se realizan con base en procesos simulados en donde los parámetros fueron especificados como sigue: $\mu = 0.055,\ \alpha = 10\ y\ \sigma = 0.1$, los mismos que fueron utilizados en las simulaciones de los procesos de la Figura1. Por efectos prácticos se presentan sólo dos de los casos de los mostrados en dicha figura, evaluando el desempeño de la estimación tanto en escenarios de volatilidad aditiva como de volatilidad proporcional.

Tabla 2: Estimación de los parámetros			
$\varepsilon = 0 \qquad \gamma = 0$		$\varepsilon = 0 \qquad \gamma = 1$	
Parámetro	Intervalo*	Parámetro	Intervalo*
$\hat{\mu} = 0.0561$	$[0.00504 \quad 0.05724]$	$\hat{\mu} = 0.0551$	$[0.00549 \quad 0.05513]$
$\hat{\alpha} = 14.665$	$[13.9446 \quad 15.3855]$	$\hat{\alpha} = 10.625$	$[10.3964 \quad 10.8564]$
$\hat{\sigma} = 0.09935$	$[0.09884 \quad 0.09986]$	$\hat{\sigma} = 0.09946$	$[0.09895 \quad 0.09996]$
*Intervalos de confianza al 95% con una muestra de 300 procesos			

Los resultados mostrados en la Tabla2 refuerzan la idea de que los estimadores de máxima verosimilitud tienen muy buenas cualidades, estando bastante cerca de los parámetros reales.

4. Propiedades estadísticas de los modelos de tasas de interés

Como se introdujo en la sección 2, existen diferentes propiedades de los procesos estocásticos de tasas de interés que pueden ser definidas de manera específica a partir de las estructuras particulares que ellos poseen. En esta sección se presentan características adicionales que son generales a los diferentes modelos, razón por la cual su estudio se enfoca en el análisis de las propiedades que pueden ser definidas en términos del modelo general (1). A manera de introducción, se presentan características particulares de los modelos de Merton y Vasicek (Para más detalle en los modelos ver [1]).

La solución exacta para la ecuación diferencial estocástica asociada al modelo de Merton ($dr_t = \alpha dt + \sigma dB_t$) viene dada por

$$r_t = r_0 + \alpha t + \sigma B_t \tag{7}$$

Del proceso anterior se pueden derivar algunas de las características mencionadas con anterioridad, como por ejemplo el comportamiento normal que evidencian los incrementos y la volatilidad aditiva presente en el modelo. Otras características están asociadas con el comportamiento esperado en el largo plazo para este modelo, las cuales pueden ser analizadas al considerar que

$$E[r_t] = r_0 + \alpha t \quad y \quad Var(r_t) = \sigma^2 t$$

De manera que no existen los respectivos límites cuando $t \to \infty$, es decir, no existe un comportamiento esperado de largo plazo.

Si se considera ahora el modelo de Vasicek ($dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma dB_t$), la solución exacta para esta ecuación diferencial estocástica está dada por

$$r_t = r_0 \mathrm{e}^{-\alpha t} + \mu(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}) + \sigma \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\, dB_s \tag{8}$$

De nuevo es factible determinar que los incrementos discretos de este proceso presentan una distribución normal (como se definió en la sección 2). Además los primeros momentos del proceso solución están definidos como

$$E[r_t] = r_0 \mathrm{e}^{-\alpha t} + \mu(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}) \quad y \quad Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - r_0 \mathrm{e}^{-\alpha t} + \mu(1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t})\right)$$

En este caso es posible determinar un comportamiento esperado en el largo plazo, pues al tomar el límite $t \to \infty$, $E[r_t] = \mu$ y $Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$, características provenientes del comportamiento de reversión que experimenta dicho proceso.

Los ejemplos anteriores permiten afirmar que existen características (distribucionales) que no pueden ser establecidas de manera colectiva para los modelos de niveles. En lo siguiente se utilizará el modelo general para la determinación de algunas características generales a los modelos de niveles, características heredadas en términos de su estructura.

Considérese el modelo general (1) dado por $dr_t = \alpha\big(\mu - g(r_t)\big) r_t^{\varepsilon} dt + \sigma f(r_t) dB_t$. Al discretizar este modelo con respecto al k-ésimo rezago se tiene que

$$r_t - r_{t-k} = \alpha\big(\mu - g(r_{t-k})\big) r_{t-k}^{\varepsilon} \Delta t_k + \sigma f(r_{t-k}) \Delta B_{t-k} \tag{9}$$

Pariendo de la ecuación (9) y utilizando de manera apropiada las propiedades del movimiento browniano es posible definir una nueva variable que capture las características distribucionales del modelo general. Para lograr lo anterior se define una variable X_t como sigue

$$X_t^{(k)} = \frac{r_t - r_{t-k} - \alpha\big(\mu - g(r_{t-k})\big) r_{t-k}^{\varepsilon}(k\Delta t)}{f(r_{t-k})} = \sigma \Delta B_k = \sigma\sqrt{k\Delta t}\, \epsilon_t \tag{10}$$

De las propiedades del movimiento browniano diferentes características pueden ser asociadas a la variable $X_t^{(k)}$:

- $X_t^{(k)} \sim X_{t^*}^{(k)} \sim N(0, \sigma^2 k \Delta t)$
- $X_t^{(k)}$es independiente de $X_{t^*}^{(k)}, \forall t, t^*: t - t^* \geq k$

En general las características anteriores son propiedades estadísticas que están presentes en los modelos de tasas de interés y que son heredadas de la definición del movimiento browniano estándar. Las anteriores características, aunque sencillas y triviales, permiten determinar las principales características distribucionales de los procesos de tasas de interés.

Como se puede observar de la ecuación (10) la definición de la variable $X_t^{(k)}$está sujeta al conocimiento de los parámetros que influyen en el modelo general. Esta condición puede ser reemplazada por el uso de sus contrapartes estimadas, permitiendo en general definir una variable $\tilde{X}_t^{(k)}$que se espera tenga un comportamiento equivalente al modelo discreto derivado directamente de los parámetros reales.

Cabe resaltar que las propiedades estadísticas descritas anteriormente parten del tratamiento discreto de la ecuación diferencial estocástica que define el modelo general, pues en este caso *no es posible* determinar la solución exacta para el modelo continuo que rige el comportamiento de las tasas de interés, dificultando el estudio de las características distribucionales de largo plazo como las expuestas para los modelos de Merton y Vasicek.

5. Comportamiento futuro de los procesos

Otro de los aspectos que tienen una gran importancia en la modelación del comportamiento de las tasas de interés está relacionado con la estimación de la evolución futura esperada de un modelo particular. Desde el punto de vista práctico éste es tal vez una de las metas más ambiciosas que se pretende alcanzar cuando se estudian las tasas de interés, pues el tener una metodología para lograr tal objetivo permitiría hacer inferencias más certeras relacionadas con todos los procesos que dependen de supuestos en el comportamiento de las trayectorias particulares de las tasas de interés.

Algunas aproximaciones al respecto de estas ideas de pronóstico (o estimación de valores futuros) han sido mencionadas en la literatura ([4] de una manera ligera. En principio es necesario contar bien con el conocimiento de los parámetros reales que definen los modelos de tasas de interés (caso de los procesos simulados) o contar con una metodología de estimación de parámetros (como la definida en las secciones anteriores), pues comportamiento futuro, cuando puede ser determinado, es una especificación que involucra los parámetros que definen los modelos particulares objeto de estudio.

Como primeros acercamientos se han propuesto especificaciones del comportamiento futuro a partir del comportamiento de medias móviles de diferentes periodos de definición, realizando los respectivos análisis que se derivan del uso de las medias móviles como determinantes de la evolución de una serie temporal.

Por otro lado, es interesante poder definir intervalos de confianza, ya sea utilizando herramientas analíticas o utilizando metodologías de simulación (como es el caso de simulaciones Monte Carlo). Dichos intervalos de confianza si bien no generan estimaciones puntuales, caracterizan el comportamiento futuro de manera que pueda tenerse cierta certeza acerca de la posible evolución de una trayectoria particular proveniente de un modelo particular.

6. Conclusiones

- Las ecuaciones diferenciales estocásticas representan una interesante metodología para el estudio de los modelos de tasas de interés, pues permiten un tratamiento bastante extenso y robusto acerca del comportamiento (real o idealizado) de las tasas, a partir de diferentes especificaciones en la extensa variedad de modelos desarrollados en el transcurso de los años y el desarrollo de nuevas teorías que soporten las propuestas empíricas.
- Las aproximaciones discretas permiten analizar con una mayor flexibilidad importantes características de los modelos continuos de tasas de interés, capturando principalmente las propiedades distribucionales heredadas de los movimientos brownianos presentes en dichos modelos.
- La descripción de los diferentes *modelos de niveles* en términos de un modelo más general hace que el tratamiento estadístico básico sea bastante sencillo, comparado con el desarrollo analítico necesario para tratar cada uno de los modelos de manera particular.
- El procedimiento de estimación de parámetros a partir de la metodología de máxima verosimilitud refleja muy buenos resultados en los modelos de tasas de interés, tanto en presencia de ruido aditivo como en la presencia de ruido proporcional.
- Es necesario estudiar algunas características de los modelos en su formulación original, como los son las distribuciones de largo plazo, pues las diferencias que se presentan entre uno y otro modelo dificultan su caracterización en términos del modelo general.
- Es necesario definir más propiedades estadísticas de los modelos de tasas de interés a partir de su modelación en tiempo continuo, pues algunas propiedades pueden verse alteradas en la discretización de las ecuaciones diferenciales estocásticas.
- La determinación del comportamiento futuro es uno de los objetivos que presenta mayor dificultad tanto desde el campo práctico como desde el teórico, razón por la cual es necesario definir nuevas alternativas que permitan inferir, con cierto grado de certeza, propiedades estadísticas de largo plazo en los modelos de tasas de interés.

7. Referencias

[1] **Bayazit, Dervis** (2004). *Yield Curve Estimation and Prediction with Vasicek Model*. Middle East Technical University.

[2] **Cortés J.C, Jódar L., Villafuerte L.** (2007). *Numerical solution of random differential equations: A mean square approach.* Mathematical and computer modeling.

[3] **Cortés J.C, Jódar L., Villafuerte L.** (2007). *Mean square numerical solution of random differential equations: Facts and possibilities.* Computers and Mathematics with applications.

[4] **García, Jose Carlos**. *Maximum likelihood estimation of mean reverting processes*. Onward inc. Real Option Practice.

[5] **Hillebrand, Eric** (2003). *Mean reversion models of financial markets*. Bremen University.

[6] **Salsa, Sandro** (2008).*Partial Differential Equations in Action: From modeling to Theory.* Springer- Verlag Italia, Milano. Departamento de Matemáticas, Politécnico de Milano.

[7] **Solana, P; Sánchez, M.J**. *Modelos de precios de la energía eléctrica en España: Reversión a la media de primer y segundo orden.* Universidad Politécnica de Madrid.

[8] **Valderas, Juan; Alba, José; Olmedo, Elena.** *Modelización estocástica en los mercados financieros: Un puente entre lo simple y lo complejo*. Universidad de Sevilla, España.

[9] **Yu, Jun** (2008). *Bias in the estimation of the mean reversion parameter in continuous time models.* School of economics, Singapore Management University.

[10] **Zúñiga, Sergio** (1999). *Modelos de tasas de interés en Chile: Una revisión*. Cuadernos de Economía, Año 36, Nº 108, pp. 875-893