

# WAVELETS Q-DEFORMADAS

Practica Investigativa III

Daniel Felipe Loaiza Correa

Asesor

Gustavo Castañeda



ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MEDELLÍN

Junio 2010

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Funciones $q$ -exponenciales y $q$ -logarítmicas . . . . .	3
1.2. Definiciones y comportamiento general . . . . .	4
1.3. Propiedades . . . . .	7
1.4. $q$ -Gaussianas . . . . .	12
<b>2. Wavelets</b>	<b>15</b>
2.1. Introducción . . . . .	15
2.2. Importancia de las Wavelets . . . . .	16
2.3. Comparación Wavelets - Fourier . . . . .	16
2.4. Wavelets Vs Fourier . . . . .	17
2.5. Wavelet de Haar . . . . .	18
2.5.1. Aproximación de la wavelet de Haar con diferencias finitas . . . . .	18
2.5.2. Diferencia entre aproximación de escalas y wavelets . . . . .	19
2.5.3. Series de Fourier . . . . .	20
2.6. Concepto de error en la comparación de funciones . . . . .	22
2.7. Wavelets $q$ -deformadas . . . . .	24
2.7.1. Sombrero Mexicano . . . . .	24
<b>3. Aplicaciones de las <math>q</math>-deformadas</b>	<b>28</b>
3.1. Parejas sexuales . . . . .	28
3.2. Producto Interno Bruto (PIB) . . . . .	29
3.3. Distribuciones Geográficas . . . . .	33
<b>Conclusiones</b>	<b>36</b>





# Introducción

Desde principios del siglo pasado se propuso una generalización de la función exponencial natural; una deformación de la misma. Con el desarrollo de la estadística de Tsallis, a partir de la generalización del concepto de entropía dada en 1998, en la década de los noventa se hace teoría sobre funciones exponenciales y logarítmicas deformadas. Sólo a partir del presente siglo, se plantean investigaciones donde se hacen desarrollos teóricos y aplicaciones de dichas funciones. Precisamente, se presentan las funciones, sus propiedades, algunas aplicaciones en teoría matemática y en diferentes contextos como en física o ciencias sociales.

La representación de funciones puede ser útil en diferentes áreas, por ejemplo, las series de Fourier son utilizadas para convertir señales discretas en señales continuas, esto es de gran utilidad en el área de telecomunicaciones para convertir las señales digitales en analógicas, por ejemplo las señales que recibe un celular cuando una persona está hablando simplemente son los coeficientes de la serie de Fourier, para poder ver televisión digital en televisores analógicos se convierte la señal digital, la cual es una señal discreta de ceros y unos, a través de la representación de esta señal por medio de la serie de Fourier, en una señal analógica, la cual es continua (senos y cosenos). Representar señales por medio de la Wavelet de Haar también podría ser de interés ya que lo que hace es lo contrario de la serie de Fourier, es decir, convierte una señal continua en una señal discreta. Hacer un análisis del error de la representación de funciones es de bastante interés, ya que se puede cuantificar la pérdida de información en el proceso de conversión, para tomar medidas al respecto.

## Objetivos

### Objetivo general

El objetivo del proyecto es analizar posibles formas de representar una función, ver cómo influye la exactitud con la que se calcula diferentes operaciones en el nivel de representación de esta función y encontrar un concepto de error, el cual sea significativo en la comparación de funciones y a la vez tenga un alto grado de interpretación.

### Objetivos específicos

1. Estudiar los conceptos básicos de funciones exponenciales  $q$ -deformadas y logaritmos  $q$ -deformados; presentando las pruebas de las propiedades básicas.
2. Identificar y analizar las posibles aplicaciones relacionadas con las Wavelets y  $q$ -Wavelets.
3. Aplicar métodos numéricos que ayuden a la simulación de las Wavelets.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Funciones q-exponenciales y q-logarítmicas

En esta sección vamos a presentar algunas propiedades de las funciones q-logaritmo y q-exponencial restringidas a un dominio real. La expansión analítica a un dominio complejo será abordada en la sección 4. Algunas propiedades aquí presentadas (y otras que no incluimos) pueden ser encontradas en 67, 68 y 69. Consideremos una ecuación ordinaria lineal de primer orden no homogénea

$$Y' + p(x)y = r(x) \quad (1.1)$$

Multiplicando la ecuación por el factor de integración  $\exp^{\int p(x)dx}$ , esta se transforma en una ecuación diferencial exacta, en su bien conocida solución general dada por:

$$Y(x) = C \exp^{-\int p(x)dx} + \exp^{-\int p(x)dx} \int r(x) \exp^{\int p(x)dx} dx \quad (1.2)$$

Un caso particular  $p = -1$ ,  $r = 0$  y  $y' = y$ , teniendo como solución una función exponencial. La invariancia de la derivación es una de las propiedades más significativas de la exponencial y hace una de las más bellas funciones analíticas. Algunas ecuaciones no lineales pueden ser reducidas a una forma lineal, 1.1. Es llamada ecuación de Bernoulli en homenaje a Jakob Bernoulli (1654-1705).

$$Y' + p(x)y = g(x)y^q \quad (1.3)$$

Cuyo método de solución fue encontrado por Leibniz (1646-1716) en 1696. Un cambio de variable  $u(x) = [y(x)]^{1-q}$  se reduce a la forma lineal

$$u' + (1-q)p(x)u = (1-q)g(x) \quad (1.4)$$

Y, por tanto una segunda solución general:

$$u(x) = C \exp^{-\int p(x)dx} + (1-q) \exp^{-\int p(x)dx} \int g(x) \exp^{(1-q)\int p(x)dx} dx \quad (1.5)$$

Siendo  $C$  una constante de integración. El caso particular  $p = 0$ ,  $g = 1$  corresponde a  $y' = y^q$ , la solución

$$y = [C + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \quad (1.6)$$

Impone una condición de contorno  $y(0) = 1$ , es decir que el valor de la función  $y(x)$  coincida con un valor de la exponencial en  $x = 0$  (equivalente a considerar  $Y(x)$  como una función distribución

inversa acumulada de probabilidad), obtenemos la  $q$ -exponencial  $y(x) = 1 + [(1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}$  (ver eq.1.9). Esta debe haber sido un de las primeras apariciones (aunque sea indirectamente) de la función  $q$ -exponencial. Otro presagio de  $q$ -exponencial (particularmente  $\exp_q 1$ ) y una propia definición del número  $e$ , símbolo en homenaje a Euler (1707-1783)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Recientemente esta expresión se generalizó en [74] a fin de obtener la  $q$ -exponencial utilizando el  $q$ -álgebra.

## 1.2. Definiciones y comportamiento general

El  $q$ -deformado que estamos tratando están definidas por <sup>1</sup>

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (x \in \mathbb{R}_+, q \in \mathbb{R}). \quad (1.8)$$

$$\exp_q(x) \equiv e_q^x \equiv e_q(x) \equiv \begin{cases} [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}, & \text{si } [1 + (1 - q)x] > 0, \\ 0, & \text{si } [1 + (1 - q)x] \leq 0 \end{cases} \quad (x, q \in \mathbb{R}) \quad (1.9)$$

Muchas veces un función  $q$ -exponencial es escrita de una forma más compacta como

$$[1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (1.10)$$

Siendo  $[A]_+ \equiv \max A, 0$ . Una primera observación es que las funciones tradicionales  $\ln x$  y  $e^x$  (que con esta generalización pueden ser denotadas por  $\ln_1$  y  $e_1^x$ , o  $\exp_1^x$  o también  $e_1(x)$ ) son casos particulares de las funciones  $q$ -deformadas:

$$\ln_1 x = \lim_{q \rightarrow 1+0} \ln_q x = \lim_{q \rightarrow 1-0} \ln_q x \quad (1.11)$$

$$\exp_1 x = \lim_{q \rightarrow 1+0} \exp_q x = \lim_{q \rightarrow 1-0} \exp_q x \quad (1.12)$$

También es inmediato verificar que una es la inversa de la otra:

$$\ln_q(\exp_q x) = \exp_q(\ln_q x) = x. \quad (1.13)$$

Incluso

$$\ln_q 1 = 0, \quad \exp_q 0 = 1. \quad (1.14)$$

---

<sup>1</sup>Las notaciones  $\exp_q(x)$ ,  $e_q^x$  y  $e_q(x)$  aparecen en la literatura. Se mantendrá un patrón dentro de una misma sección o capítulo, pero no será un único patrón para toda la tesis.

Una q-exponencial trae en su definición un corte para  $q < 1$ , siempre que  $x \leq \frac{-1}{(1-q)}$  (soporte compacto). Este corte garantiza que su imagen sea real. En términos físicos, un corte garantiza que una probabilidad de ocupación de estados sea una función decreciente de energía: una probabilidad de un estado de energía  $E$  es proporcional a  $\exp_q(-\beta_q E)$ . Si  $q = \frac{1}{2}$ , si no hubiese un corte, la probabilidad sería creciente para  $E$ , para  $E \geq \frac{1}{(1-q)\beta_q}$ , lo que es físicamente inaceptable. Además, si no se cortan las probabilidades serían números imaginarios siempre que sea una potencia  $\frac{1}{(1-q)}$  ni siquiera para  $E > \frac{1}{(1-q)\beta_q}$ . Para  $q > 1$ ,  $\exp_q x$  diverge con  $x = \frac{1}{(q-1)}$ , y permanece divergente para  $x > \frac{1}{(q-1)}$ . También,  $\exp_q x$  es una función monótona creciente entre  $-\infty$  y  $\frac{1}{(q-1)}$  para  $q > 1$ , y entre  $\frac{-1}{(1-q)}$  y  $\infty$  para  $q < 1$ . La figura 1.1 ilustra el comportamiento de  $\exp_q x$  para algunos valores típicos de  $q$ .

En rigor no sería necesario ilustrar una función q-logaritmo, pues esta es la función inversa de la q-exponencial. Ponemos la figura 1.2 por claridad y exhaustividad.  $\ln_q x$  es una función monótona creciente para  $x > 0$ ,  $\forall q$ , y, para  $q > 1$ ,  $\ln_q x$  se aproxima asintóticamente de  $\frac{1}{(q-1)}$ . Notemos que, para  $q = 0$ , estas funciones son lineales ( $\ln_0 x = x - 1$ ;  $\exp_0 x = x + 1$ ). La Tabla 1.2 presenta una manera alternativa (en relación a la figura 1.1) de ilustrar el comportamiento de la función q-exponencial. Esta considera valores positivos de la variable independiente  $x$ , y muestra separadamente los casos de crecimiento y decrecimiento.

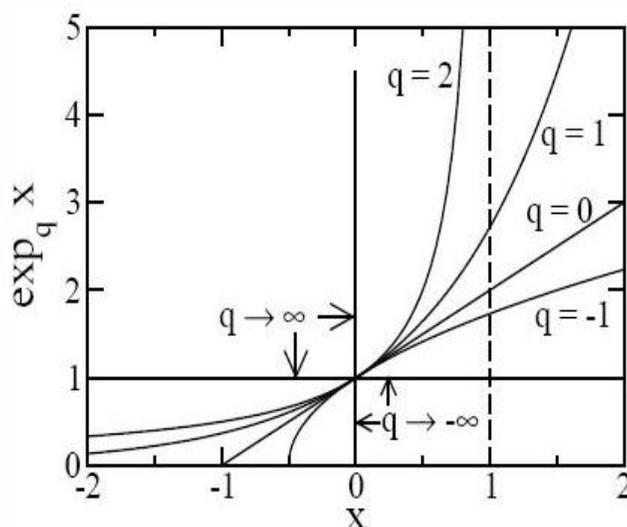


Figura 1.1: Función q-exponencial para valores típicos de  $q$ . La línea punteada vertical indica una asíntota en  $x = \frac{1}{(q-1)}$  para  $q = 2$ .

$\exp_q(ax)$ $x \geq 0$	$q > 1$	$q < 1$
$a > 0$	Monótona creciente con divergencia en $1/[a(q-1)]$	Monótona creciente sin divergencia
$a < 0$	Monótona decreciente sin corte	Monótona decreciente con corte en $1/[ a (1-q)]$

Tabla 2.1: Comportamiento de la función q-exponencial

Consideremos una situación más frecuente,  $y(x) = A \exp_q(-\beta_q x)$ , con  $x > 0$ ,  $\beta_q > 0$  ( $a = -\beta_q$

en la Tabla 1.1). Es  $q > 1$  Un comportamiento asintótico  $\sim A[(q-1)\beta_q x]^{\frac{1}{1-q}}$

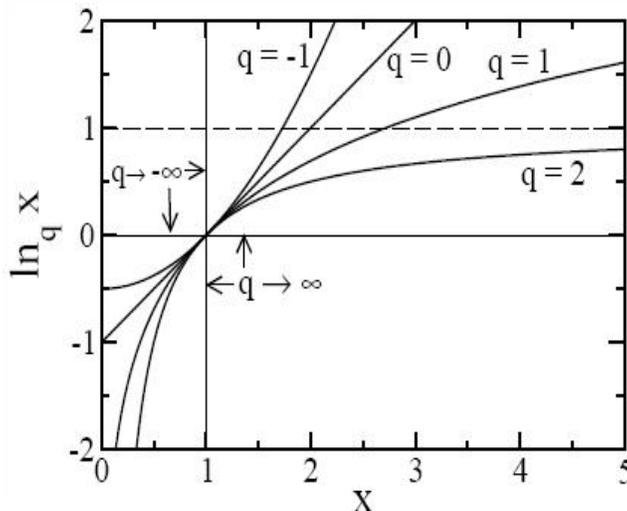


Figura 1.2: Función  $q$ -logaritmo para valores típicos de  $q$ . La línea punteada horizontal indica una asíntota en  $x = \frac{1}{(q-1)}$  para  $q = 2$ .

Es descomposición es un tipo de ley de potencia, uno de los rasgos más llamativos de la  $q$ -exponencial, En contraste con un decaimiento exponencial. La fig 1.3 ilustra este caso en un gráfico de log-log, indicando como identificar visualmente los parámetros  $A$ ,  $\beta_q$  y  $q$ . Otra manera de identificar visualmente una  $q$ -exponencial es a través de un gráfico en escala semi- $q$ -logarítmica, que es una generalización de un gráfico semi-logarítmico (abscisa lineal, ordenada logarítmica). Una función  $q$ -exponencial aparece como una línea recta en el gráfico semi- $q$ -log, desde que el valor de  $q$  sea el correcto. La fig 1.4 ilustra la misma función de la fig 1.3 ( $y(x)$  en la fig 1.3 corresponde a  $x$  en la fig 1.4). Cuando el valor de  $q$  en el gráfico semi- $q$ -log es menor que el valor "correcto" de datos (en este caso, los valores son representados por  $A \exp_q(-\beta_q x)$ , con los mismos parámetros de la fig 1.3, es decir, un valor correcto de  $q$  en este ejemplo es 1.5), la curva aparece con una curvatura positiva; inversamente, cuando  $q > 1.5$ , la curvatura es negativa. Así que es posible identificar el valor de  $q$  (aquel que linealiza la curva). La intersección de la curva con el eje  $x = 0$  ocurre en  $y(0) = \ln_q A$  (si  $A = 1$ , ocurre en  $y(0) = 0$ ). Un valor de  $\beta_q$  puede ser observado a partir de la pendiente de la recta. Si  $A = 1$ , la pendiente coincide exactamente (en modulo) con  $\beta_q$ . En el caso general la pendiente esta dada por  $I$  (ver ecuación 1.15)

$$I = -\beta_q(1 + (1 - q) \ln_q A) \quad (1.15)$$

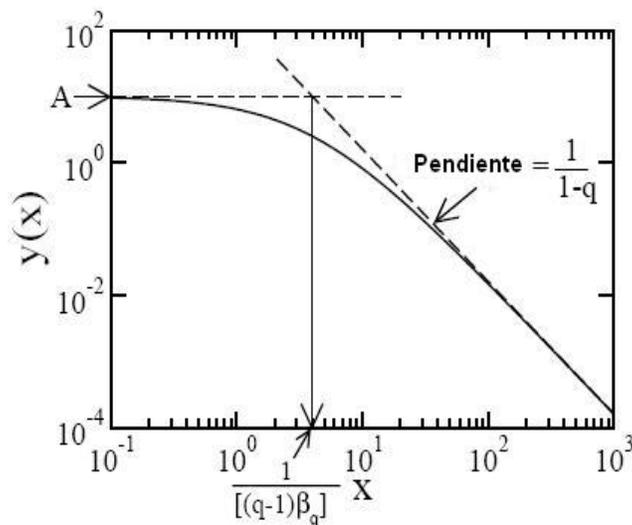


Figura 1.3: Ley de tipo cola para potencia de la función  $q$ -exponencial, representada por  $y(x) = A \exp_q(-\beta_q x)$ .  $A = 10$ ,  $\beta_q = 0.5$  y  $q = 1.5$ . La pendiente (negativa) de un sistema asintótico está dada por  $1/(1-q)$ . La intersección entre la recta horizontal en  $y = A$  y la recta de comportamiento asintótico  $A[(q-1)\beta_q x]^{1/(1-q)}$  (ambas punteadas) ocurre en  $x = 1/[(q-1)\beta_q]$ .

### 1.3. Propiedades

Diversos autores han presentado propiedades interesantes de las funciones  $q$ -logaritmo y  $q$ -exponencial. A continuación se listan algunas de ellas. Las demostraciones son inmediatas. Naturalmente todas ellas se reducen a las expresiones habituales cuando  $q \rightarrow 1$ .

1.  $q$ -logaritmo de un producto.

$$\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (1-q) \ln_q x \ln_q y. \quad (1.16)$$

**Demostración**

Por definición se sabe que  $\ln_q x = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}$  entonces.

$$\begin{aligned}
 \ln_q x + \ln_q y + (1-q) \ln_q x \ln_q y &= \frac{x^{1-q}-1}{1-q} + \frac{y^{1-q}-1}{1-q} + (1-q) \left[ \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \cdot \frac{y^{1-q}-1}{1-q} \right] \\
 &= \frac{x^{1-q}-1}{1-q} + \frac{y^{1-q}-1}{1-q} + \frac{(x^{1-q}-1)(y^{1-q}-1)}{1-q} = \frac{(x^{1-q}-1) + (y^{1-q}-1) + (x^{1-q}-1)(y^{1-q}-1)}{1-q} \\
 &= \frac{x^{1-q}-1 + y^{1-q}-1 + x^{1-q}y^{1-q} - x^{1-q} - y^{1-q} + 1}{1-q} \\
 &= \frac{x^{1-q}-1 + y^{1-q}-1 + x^{1-q}y^{1-q} - x^{1-q} - y^{1-q} + 1}{1-q} \\
 &= \frac{x^{1-q}y^{1-q} - 1}{1-q} \\
 &= \frac{x^{1-q}y^{1-q} - 1}{1-q} = \ln_q(xy)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (1-q) \ln_q x \ln_q y.$$

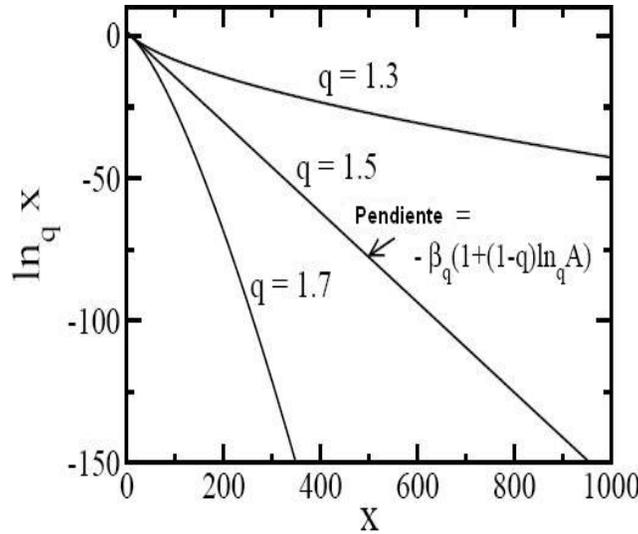


Figura 1.4: Ley de tipo cola para potencia de la función  $q$ -exponencial, representada por  $y(x) = A \exp_q(-\beta_q x)$ .  $A = 10$ ,  $\beta_q = 0.5$  y  $q = 1.5$ . La pendiente (negativa) de un sistema asintótico está dada por  $1/(1-q)$ . La intersección entre la recta horizontal en  $y = A$  y la recta de comportamiento asintótico  $A[(q-1)\beta_q x]^{1/(1-q)}$  (ambas punteadas) ocurre en  $x = 1/[(q-1)\beta_q]$ .

2.  $q$ -logaritmo de la razón.

$$\ln_q(x/y) = \frac{\ln_q x - \ln_q y}{1 + (1-q) \ln_q y} \quad (1.17)$$

## Demostración

$$\begin{aligned}
\frac{\ln_q x - \ln_q y}{1 + (1 - q) \ln_q y} &= \frac{\frac{x^{1-q}-1}{1-q} - \frac{y^{1-q}-1}{1-q}}{1 + (1 - q) \frac{y^{1-q}-1}{1-q}} \\
&= \frac{\frac{(x^{1-q}-1)(1-q) - (y^{1-q}-1)(1-q)}{(1-q)^2}}{1 + (1 - q) \frac{y^{1-q}-1}{1-q}} \\
&= \frac{\frac{(x^{1-q}-1)(1-q) - (y^{1-q}-1)(1-q)}{(1-q)^2}}{1 + (1 - q) \frac{y^{1-q}-1}{(1-q)}} \\
&= \frac{\frac{(x^{1-q}-1) - (y^{1-q}-1)}{(1-q)}}{y^{1-q}} \\
&= \frac{x^{1-q} - y^{1-q}}{(1 - q)y^{1-q}} \\
&= \frac{\frac{x^{1-q}}{y^{1-q}} - \frac{y^{1-q}}{y^{1-q}}}{\frac{(1-q)y^{1-q}}{y^{1-q}}} \\
&= \frac{\frac{x^{1-q}}{y^{1-q}} - \frac{y^{1-q}}{y^{1-q}}}{\frac{(1-q)y^{1-q}}{y^{1-q}}} \\
&= \frac{\frac{x^{1-q}}{y^{1-q}} - 1}{(1 - q)} \\
&= \frac{\frac{x^{1-q}}{y^{1-q}} - 1}{(1 - q)} = \ln_q(x/y)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\ln_q(x/y) = \frac{\ln_q x - \ln_q y}{1 + (1 - q) \ln_q y}$$

En particular, el q-logaritmo para la inversa de un número  $x$  no es nulo.

$$\ln_q x^{-1} = -\frac{\ln_q x}{1 + (1 - q) \ln_q x} = -\frac{1}{x^{1-q}} \ln_q x \quad (1.18)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
-\frac{\ln_q x}{1 + (1 - q) \ln_q x} &= -\frac{\frac{(x^{1-q}-1)}{(1-q)}}{1 + (1 - q) \frac{x^{1-q}-1}{1-q}} \\
&= -\frac{\frac{(x^{1-q}-1)}{(1-q)}}{1 + (1 - q) \frac{x^{1-q}-1}{1-q}} \\
&= -\frac{\frac{(x^{1-q}-1)}{(1-q)}}{x^{1-q}} \\
&= -\frac{(x^{1-q} - 1)}{(1 - q)(x^{1-q})} \\
&= -\frac{1}{x^{1-q}} \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \\
&= -\frac{1}{x^{1-q}} \ln_q x
\end{aligned}$$

Luego,

$$\ln_q x^{-1} = -\frac{\ln_q x}{1+(1-q)\ln_q x} = -\frac{1}{x^{1-q}} \ln_q x$$

3. q-logaritmo de una potencia.

$$\ln_q x^a = \frac{a}{1 - q} \ln_{1-a} x^{1-q} \quad (1.19)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1 - q} \ln_{1-a} x^{1-q} &= \frac{a}{1 - q} \frac{(x^{1-q})^{1-(1-a)} - 1}{1 - (1 - a)} \\
&= \frac{a}{1 - q} \frac{x^{(1-q)a} - 1}{a} \\
&= \frac{x^{(1-q)a} - 1}{1 - q} \\
&= \frac{(x^a)^{1-q} - 1}{1 - q} \\
&= \ln_q x^a
\end{aligned}$$

Luego,

$$\ln_q x^a = \frac{a}{1-q} \ln_{1-a} x^{1-q}$$

4. Derivada de un q-logaritmo.

$$\frac{d}{dx} \ln_q x = \frac{1}{x^q} \quad (1.20)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln_q x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \right) \\ &= \frac{(1 - q)x^{(1-q)-1} \cdot (1 - q) - (x^{1-q} - 1) \cdot 0}{(1 - q)^2} \\ &= \frac{(1 - q)x^{(1-q)-1} \cdot (1 - q)}{(1 - q)^2} \\ &= x^{-q} \\ &= \frac{1}{x^q} \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{d}{dx} \ln_q x = \frac{1}{x^q}$$

5. Integral de un q-logaritmo.

$$\int \ln_q x dx = \frac{x \ln_q x - x}{2 - q} \quad (1.21)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
\int \ln_q x dx &= \int \frac{(x^{1-q} - 1)}{1 - q} dx \\
&= \frac{1}{1 - q} \int (x^{1-q} - 1) dx \\
&= \frac{1}{1 - q} \left[ \frac{x^{2-q}}{2 - q} - x + c \right] \\
&= \frac{1}{1 - q} \left[ \frac{x^{2-q} - x(2 - q)}{2 - q} \right] + c \\
&= \frac{1}{(1 - q)(2 - q)} \left[ x \{ x^{1-q} - 2 + q \} \right] + c \\
&= \frac{1}{(2 - q)} x \left[ \frac{x^{1-q} - 1 - 1 + q}{(1 - q)} \right] + c \\
&= \frac{1}{(2 - q)} x \left[ \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} - \frac{1 - q}{1 - q} \right] + c \\
&= \frac{1}{(2 - q)} x \left[ \ln_q x - 1 \right] + c \\
&= \frac{x \ln_q x - 1}{2 - q} + c
\end{aligned}$$

Luego,

$$\int \ln_q x dx = \frac{x \ln_q x - 1}{2 - q}$$

Particularmente, la divergencia de  $\ln_q x$  cuando  $x \rightarrow 0$  (y  $q > 1$ ) es suficientemente suave, de modo que

$$\int_0^1 \ln_q x = \frac{-1}{2 - q} < \infty \quad (1.22)$$

**1.4.  $q$ -Gaussianas**

La distribución normal o gaussiana es una de las distribuciones de probabilidad con mayores aplicaciones, tanto en el desarrollo del conocimiento matemático, como en diversas áreas de las ciencias básicas y humanas. Para una variable aleatoria  $X$  que distribuya normal, dicha distribución está definida mediante la expresión:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Donde, como es habitual,  $\mu$  representa el valor esperado de la variable aleatoria  $X$ , y  $\sigma$  el valor de la desviación estándar. En [?] Naudts propone una generalización de la distribución gaussiana; la

propuesta de Naudts se apoya en trabajos anteriores de Tsallis, Plastino, Moyano y Hilhors; una importante referencia para el estudio detallado de la  $q$ -generalización de la distribución gaussiana y del teorema del límite central puede ser consultada en [?]. La generalización propuesta por Naudts en [?] para la función gaussiana está dada por la distribución  $q$ -gaussiana:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{c_q \sigma} \exp_q\left(\frac{-t^2}{\sigma^2}\right) dt \quad \text{con} \quad q < 3 \quad (1.23)$$

La función de densidad de probabilidad asociada a esta distribución puede escribirse como:

$$\frac{1}{c_q \sigma} \exp_q\left(\frac{-x^2}{\sigma^2}\right) \quad (1.24)$$

Donde  $c_q$  está dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp_q(-x^2) \quad (1.25)$$

Al resolver la integral en 1.25 se tiene:

$$c_q = \sqrt{\frac{\pi}{q-1}} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \quad \text{para} \quad 1 < q < 3 \quad (1.26)$$

y

$$c_q = \sqrt{\frac{\pi}{1-q}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1-q}\right)} \quad \text{para} \quad q < 1 \quad (1.27)$$

Para el caso de la termo-estadística generalizada, la densidad de probabilidad que optimiza la entropía se escribe como:

$$f_\beta(x) = c(x) \exp_q(-\alpha(\beta) - \beta H(x)) \quad (1.28)$$

Donde  $H(x)$  representa el hamiltoniano de la energía,  $\beta$  es un parámetro que depende del inverso de la temperatura  $\frac{1}{T}$  y  $\alpha(\beta)$  es un parámetro que se obtiene del proceso de optimización por multiplicadores de Lagrange. Para obtener la forma  $q$ -gaussiana para 1.28 se realizan las sustituciones:

$$c(x) = \frac{1}{c_q}; \quad H(x) = x^2; \quad \beta = \sigma^{3-q}; \quad \alpha(\beta) = \ln_{2-q}(\sigma)$$

Es claro que para  $q = 1$  se obtiene la distribución normal estándar. Un camino un poco más general, aunque equivalente, es abordado por Moyano en [?]. en este caso 1.28 se escribe como:

$$f(x) = \mathcal{A}_q [1 + (q-1) \mathcal{B}_q(x - \mu_q)^2]^{-\frac{1}{1-q}}; \quad \text{para} \quad q < 3 \quad (1.29)$$

Donde la media generalizada  $\mu_q$  puede escribirse en términos de la densidad de probabilidad

$$P(x) = \frac{p(x)^q}{\int_{\Gamma} [p(x)]^q dx} \quad (1.30)$$

Como:

$$\mu_q = \int_{\Gamma} x P(x) dx \quad (1.31)$$

Las probabilidades  $P(x)$  son conocidas como *probabilidades escort* y son propuestas por Tsallis en el proceso de optimización de la entropía para el ensamble canónico. Como es usual  $\Gamma$  es el

espacio de fase correspondiente al sistema y  $p(x)$  la densidad de probabilidad para los diferentes estados del sistema.

Además:

$$\mathcal{A}_q = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{q-1}\right)} \sqrt{\frac{q-1}{\pi}} \mathcal{B}_q \quad \text{para } 1 < q < 3 \quad (1.32)$$

y

$$\mathcal{A}_q = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-q}\right)} \sqrt{\frac{1-q}{\pi}} \mathcal{B}_q \quad \text{para } q < 1 \quad (1.33)$$

Con:

$$\mathcal{B}_q = [(3-q)\sigma_q^2]^{-1} = (5-3q)\sigma^2]^{-1} \quad (1.34)$$

Donde la varianza  $q$  generalizada se relaciona con la varianza usual mediante la expresión:

$$\sigma_q^2 = \frac{5-3q}{3-q} \sigma^2$$

Finalmente, 1.29 puede escribirse como la  $q$ -gaussiana:

$$f(x) = \mathcal{A}_q \exp_q(-\mathcal{B}_q(x - \mu_q)^2) \quad (1.35)$$

## Capítulo 2

# Wavelets

### 2.1. Introducción

Las wavelets son un desarrollo relativamente reciente tanto en matemáticas puras como aplicadas; estas tienen, con respecto a la teoría y a sus aplicaciones, una fuerte conexión con las transformadas de Fourier. Los wavelets son funciones que satisfacen ciertos requisitos matemáticos y se utilizan para representar señales u otras funciones. Esta idea no es nueva, la aproximación usando superposición de funciones ha existido desde 1800, cuando Joseph Fourier descubrió que se podían superponer senos y cosenos para representar otras funciones. Sin embargo, en el análisis a través de wavelets, la escala que usamos para comparar los datos tiene un rol especial. Los algoritmos con wavelets procesan la información a diferentes escalas o resoluciones. Si se mira la señal con una "ventana grande", se notarán las características generales. Similarmente, si se mira la señal con una "ventana pequeña", se notarán las características en detalle. El resultado del análisis a través de wavelets es la posibilidad de considerar ambos, lo general y lo particular. Estas razones hacen del análisis a través de wavelets una herramienta útil e interesante. El procedimiento del análisis a través de wavelets es tomar una función prototipo, llamada wavelet madre, para compararla con la señal. El análisis temporal se realiza con una versión contraída, de alta frecuencia del wavelet madre, mientras que el análisis de frecuencia se realiza con una versión dilatada de baja frecuencia del mismo wavelet. Debido a que la señal o la función original se puede representar en términos de una expansión en las funciones wavelet (que usa coeficientes en una combinación lineal de estas), las operaciones con los datos se pueden realizar usando apenas los coeficientes correspondientes de la expansión. Y si además se eligen los wavelets que mejor se adaptan a los datos, o si se truncan los coeficientes que se encuentran por debajo de un umbral, los datos se pueden representar en forma dispersa; esta codificación hace a los wavelets una herramienta excelente en el campo de la compresión de datos. La idea detrás de las wavelets es básicamente incluir un análisis para funciones que tenga en cuenta tanto el período como la frecuencia al mismo tiempo. Mientras, en un análisis de Fourier general, que puede utilizar diferentes conjuntos de funciones ortogonales (no solamente senos y cosenos), sólo se puede analizar la función o en el período o en la frecuencia. Lo anterior permite que análisis de una señal mediante wavelets refleje con mucho más detalle la información, además de poder dar cuenta de zonas donde se concentra la energía de la señal. Gracias a esto no se pierde información esencial importante a la hora de recrear la señal original a mediante los datos recopilados en el análisis[1].

## 2.2. Importancia de las Wavelets

En los últimos tiempos la utilización de las wavelets ha cobrado gran importancia en campos como la medicina, geología, ingeniería aeroespacial, compresión de datos e imágenes, astronomía, acústica, ingeniería nuclear, neurofisiología, música, óptica, fractales, turbulencias, predicción de terremotos, radares, visión humana, matemáticas puras en busca de soluciones a ecuaciones en derivadas parciales, entre otras[2], gracias a que a través del análisis wavelet se permite una representación y descomposición con ventanas de longitud variable, adaptadas al cambio de frecuencia de la señal, preservando la información tiempo-frecuencia simultáneamente en el dominio transformado[2], lo que es de gran utilidad ya que generalmente las señales reales poseen un comportamiento no-estacionario, lo que ha llevado a varios investigadores a prestarle atención a la utilización de las wavelets en trabajos de aplicación referentes a las disciplinas anteriormente mencionadas, ya que en muchos casos las wavelets han ayudado a disminuir el número de limitaciones en la solución de problemas.

## 2.3. Comparación Wavelets - Fourier

La Teoría de Wavelets trabaja de manera similar a la Teoría de Fourier, la cual dice que una señal se compone de una serie de funciones sinusoidales y de esta forma es más sencillo su análisis. Recordando un poco, la transformada de Fourier ( $FT$ ) de la señal  $x(t)$  esta definida por:

$$FT(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.1)$$

La Transformada de Fourier trabaja bien si la señal  $x(t)$  esta compuesta de unos cuantos componentes estacionarios. Sin embargo, algún cambio repentino en el tiempo, en una señal  $x(t)$  no estacionaria, es separada del eje de frecuencias. Para contrarrestar estas desventajas se ha modificado la Transformada de Fourier dando origen a lo que es la Short Time Fourier Transform (STFT) también conocida como la Transformada de Gabor. La STFT aplica una función  $g(t)$  utilizada como ventana de análisis que se mueve sobre los datos para determinar el espectro. La expresión que nos permite este análisis es:

$$STFT(b, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g^*(t - b)e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.2)$$

Donde la variable  $b$  indica la posición en la que se hace el análisis y  $*$  denota el complejo conjugado. La desventaja que presenta esta transformada es que la ventana de análisis es de un tamaño fijo y por eso no puede adaptarse a las características de la señal en ciertos puntos interesantes de analizar.

Por lo visto anteriormente es que ha cobrado tanta fuerza la Teoría de Wavelets, dado que mantiene las ideas principales de un análisis tiempo-frecuencia utilizando una ventana de análisis diferente. En este caso se requiere de una wavelet que examina cuidadosamente a la señal de interés.

Las Wavelets son familias de funciones que se encuentran en el espacio y se emplean como funciones de análisis, examinan a la señal de interés para obtener sus características de espacio, tamaño y dirección; la familia está definida por:

$$h_{a,b} = \frac{h\left(\frac{x-b}{a}\right)}{\sqrt{|a|}}; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.3)$$

Y son generadas a partir de funciones madre  $h(x)$ . A esa función madre se le agregan un par de variables que son la escala ( $a$ ) que permite hacer dilataciones y contracciones de la señal y la variable de traslación ( $b$ ), que nos permite mover a la señal en el tiempo. Estas variables son números reales y obviamente para una escala de 0 la función se indetermina.

Existen diferentes wavelets que ya son utilizadas de forma constante y que tienen definiciones establecidas. Sin embargo, la elección de un tipo de wavelet depende de la aplicación específica que se le vaya a dar. Actualmente existen muchas aplicaciones en las que las wavelets actúan de manera directa.

## 2.4. Wavelets Vs Fourier

La Transformada de Fourier nos permite obtener la información sobre el contenido en frecuencia de la señal y sobre la localización temporal de las componentes frecuenciales, pero esta no brinda la información de los picos, Mientras que los Wavelets brindan información sobre la localización temporal de todas las componentes frecuenciales incluyendo la información de los picos[3].

Obsérvese las siguientes imágenes que ilustraran de mejor manera lo anteriormente dicho:

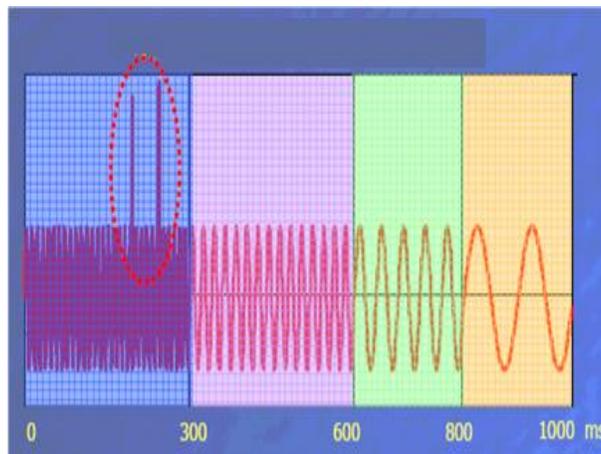


Figura 2.1: señal no estacionaria

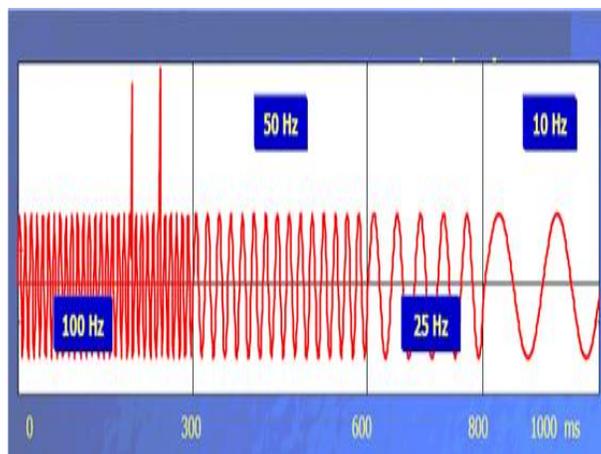


Figura 2.2: señal no estacionaria con contenido de 10,25,50 y 100 Hz

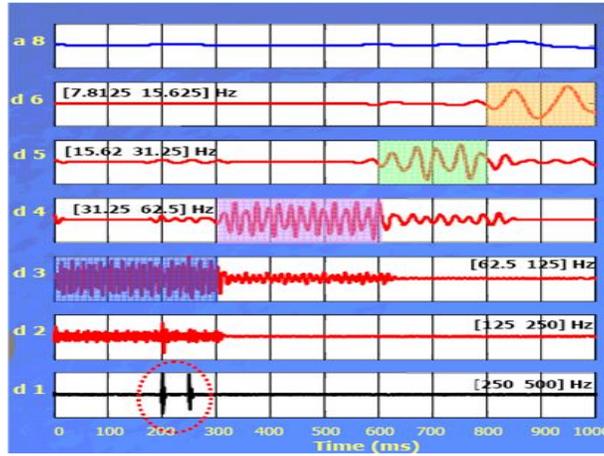


Figura 2.3: Análisis Wavelets multiresolución

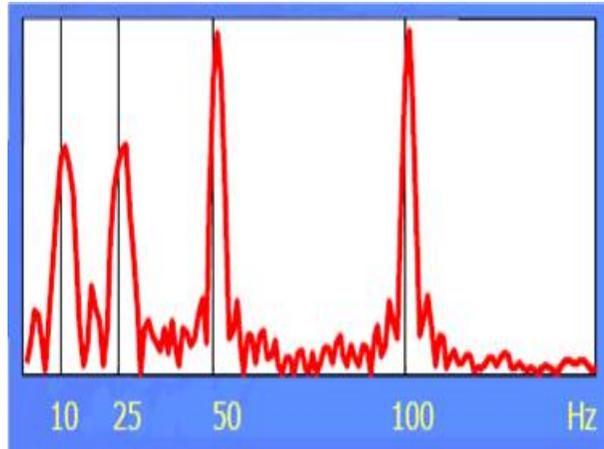


Figura 2.4: Análisis frecuencial transformada de Fourier

## 2.5. Wavelet de Haar

### 2.5.1. Aproximación de la wavelet de Haar con diferencias finitas

Muchos trabajos matemáticos trabajan con wavelets que operan en funciones en lugar de utilizar secuencias discretas. Por lo tanto, supongamos que tenemos una función  $f(x)$  definida en el intervalo  $[0, 1]$ . Las siguientes ideas se pueden extender sin ningún problema a otros intervalos, todos los enteros, o cualquier espacio Euclidiano  $d$ -dimensional. Cuando se utilizan secuencias discretas, a mayor cantidad de datos mejor resolución se logra. Con el conocimiento completo de una función uno puede trabajarla en cualquier escala que desee. Entonces para iniciar la transformada de la wavelet de Haar necesitamos escoger la escala más fina fija de la cual empezar. La consideración de esta escala fija produce una secuencia discreta, además procesar solo la secuencia puede producir toda la información posterior en escalas más gruesas. No hemos respondido hasta el momento la pregunta de cómo obtener una secuencia discreta de una función. Esta es una consideración importante pero por el momento supongamos que tenemos disponible una secuencia discreta derivada de  $f(x)$ . En el caso discreto la onda de escala más fina de coeficientes consiste en restar un elemento de su vecino en pares consecutivos de valores de secuencia.

Para la transformada wavelet de Haar en función se utiliza una noción similar que involucra la resta de integrales de la función sobre pares consecutivos de intervalos. Otra forma de ver esto es empezando con una escala fina local promedio de la función. Primero se define la wavelet de Haar padre con escala  $2^J$  por medio de  $\phi(2^J x)$  donde:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{e.o.p.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Luego se define el nivel más fino de coeficiente de la wavelet padre como:

$$C_{J,k} = \int_0^1 f(x) 2^{J/2} \phi(2^J x - k) dx, \quad (2.5)$$

Lo cual también puede denotarse como:

$$C_{J,k} = \int_0^1 f(x) \phi_{J,k} dx = \langle f, \phi_{J,k} \rangle, \quad (2.6)$$

En esta última representación se utiliza una notación de producto interior.

En este punto es necesario definir lo que representa  $c(J, k)$ . Para esto debemos mirar como se ve la función  $\phi(J, k)(x)$ .

$$\phi_{J,k}(x) = \begin{cases} 2^{J/2}, & x \in [2^{-J}k, 2^{-J}(k+1)], \\ 0, & \text{e.o.p.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Esto es, que la función  $\phi(J, k)(x)$  es constante en el intervalo  $I(J, k) = [2^{-J}k, 2^{-J}(k+1)]$  y cero en cualquier otra parte. Por lo tanto si la función  $f(x)$  está definida en el intervalo  $[0, 1]$  entonces el intervalo de  $k$  donde  $I(J, k)$  tiene solapamientos es de 0 a  $2^J - 1$ . Luego, el coeficiente  $c(J, k)$  no es más que la integral de  $f(x)$  en el intervalo  $I(J, k)$ . De hecho, el conjunto de coeficientes  $c(J, k) (k = 0) (2^J - 1)$  y la wavelet de Haar padre asociada en esa escala define una aproximación  $f_J(x)$  para  $f(x)$  definida por:

$$f_J(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} C_{J,k} \phi_{J,k}(x). \quad (2.8)$$

### 2.5.2. Diferencia entre aproximación de escalas y wavelets

Supongamos que tenemos dos aproximaciones de Haar de la misma función pero en dos niveles de escala diferentes. Para finitud supongamos que tenemos  $f_0(x)$  y  $f_1(x)$ , las dos aproximaciones más gruesas. El formador,  $f_0(x)$ , es justamente la función constante  $C_{0,0}\phi(x)$ , que es un múltiplo de la wavelet padre. Simplificando, la aproximación  $f_1(x)$  es de la forma:

$$f_1(x) = C_{1,0}\phi_{1,0} + C_{1,1}\phi_{1,1} = C_{1,0}2^{1/2}\phi(2x) + C_{1,1}2^{1/2}\phi(2x - 1) \quad (2.9)$$

La diferencia entre  $f_0(x)$  y  $f_1(x)$  es el "detalle" perdido de ir de una representación más fina,  $f_1$ , a una más gruesa,  $f_0$ . Matemáticamente:

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_0(x) &= C_{0,0}\phi(x) - 2^{1/2}\{C_{1,0}\phi(2x) + C_{1,1}\phi(2x - 1)\} \\ &= C_{0,0}\{\phi(2x) + \phi(2x - 1)\} - 2^{1/2}\{C_{1,0}\phi(2x) + C_{1,1}\phi(2x - 1)\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Luego,

$$f_1(x) - f_0(x) = (C_{0,0} - 2^{1/2}C_{1,0})\phi(2x) + (C_{0,0} - 2^{1/2}C_{1,1})\phi(2x - 1), \quad (2.11)$$

Y como  $C_{0,0} = (C_{1,0} + C_{1,1})/\sqrt{2}$ , tenemos:

$$f_1(x) - f_0(x) = (C_{1,1} - C_{1,0})\phi(2x) + (C_{1,0} - C_{1,1})\phi(2x - 1)/\sqrt{2}. \quad (2.12)$$

Ahora suponga que definimos:

$$d_{0,0} = (C_{1,1} - C_{1,0})/\sqrt{2}, \quad (2.13)$$

Entonces la diferencia resulta ser:

$$f_1(x) - f_0(x) = d_{0,0}\{\phi(2x) - \phi(2x - 1)\}. \quad (2.14)$$

En este punto es útil definir la wavelet de Haar madre como

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \phi(2x) - \phi(2x - 1) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}); \\ -1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1); \\ 0, & \text{e.o.p.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Luego, la diferencia entre dos aproximaciones de escala 0 y 1 viene dada por la sustitución de 2.14 en 2.15, de donde se obtiene

$$f_1(x) - f_0(x) = d_{0,0}\psi(x) \quad (2.16)$$

Otra forma de ver esto es reorganizando 2.16 para obtener

$$f_1(x) = C_{0,0}\phi(x) + d_{0,0}\psi(x) \quad (2.17)$$

En otras palabras, la aproximación más fina en el nivel 1 se puede obtener de la aproximación más gruesa en el nivel 0 mas el detalle encapsulado en  $d_{0,0}$ . Esto puede ser generalizado y funciona en todos los niveles, entonces tenemos:

$$f_{j+1}(x) = f_j(x) + \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}\psi_{j,k}(x) \quad (2.18)$$

$$= \sum_{k=0}^{2^j-1} C_{j,k}\phi_{j,k}(x) + \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k}\psi_{j,k}(x) \quad (2.19)$$

Después de este análisis detallado podemos concluir que cualquier función en el intervalo  $[0, 1]$  se puede aproximar por medio de la ecuación anterior.

### 2.5.3. Series de Fourier

Una función definida en el intervalo  $[-p, p]$  puede ser aproximada por la serie de Fourier la cual se define de la siguiente forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \quad (2.20)$$

$$a_0 = \frac{\langle 1, f(x) \rangle}{\|1\|^2} = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) dx \quad (2.21)$$

$$a_n = \frac{\langle \cos \frac{n\pi x}{p}, f(x) \rangle}{\|\cos \frac{n\pi x}{p}\|^2} = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx \quad (2.22)$$

$$b_n = \frac{\langle \sin \frac{n\pi x}{p}, f(x) \rangle}{\|\sin \frac{n\pi x}{p}\|^2} = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx \quad (2.23)$$

Para realizar desarrollos de medio rango, es decir de cero a  $p$ , simplemente se pone la condición de que  $a_n$  o  $b_n$  sea igual a cero.

### Representación de la función $x^2$

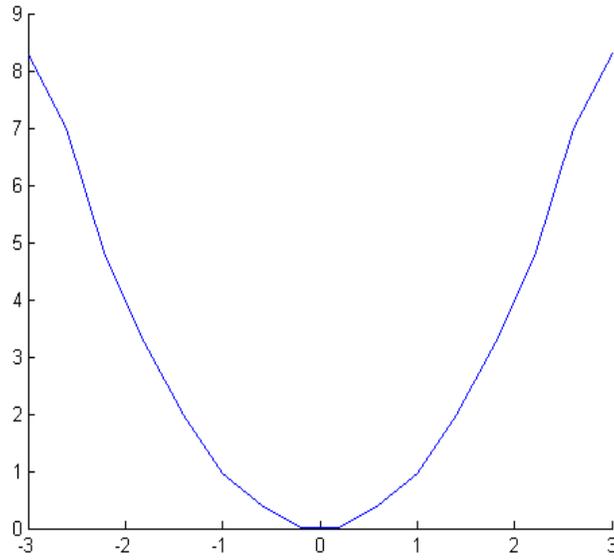


Figura 2.5: Wavelet de Haar

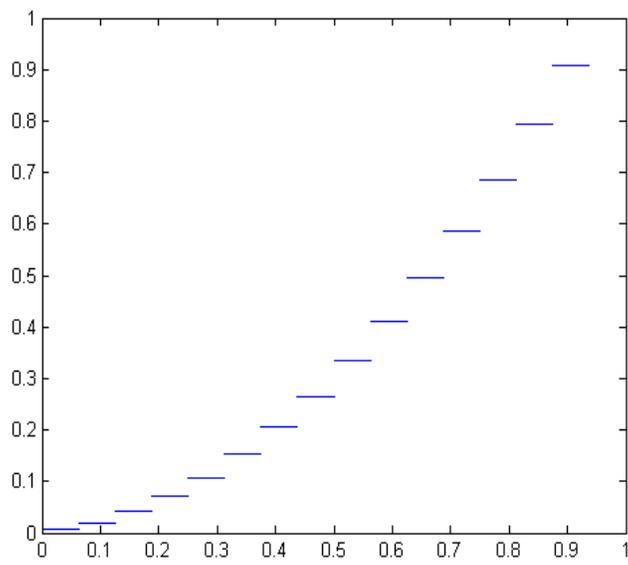


Figura 2.6: Series de Fourier

## 2.6. Concepto de error en la comparación de funciones

El error en el proceso de representación de una función depende de varios parámetros, puesto que la función se representa por medio de una sumatoria hasta infinito, al hacer solo una suma parcial para representarla obtendríamos un error de truncamiento, además para representar las funciones realizamos integrales, las cuales son estimadas por un método numérico para encontrar los coeficientes de la aproximación, por lo tanto el error de representación dependería también del número de intervalos o el tamaño del intervalo para ejecutar los métodos numéricos de integración. Hay que tener en cuenta que la representación de funciones por medio de los diferentes métodos anteriormente mencionados tiene un error inherente, es decir, si se realizara la integral analíticamente y un número de sumas parciales que tendiera a infinito, esta representación también tendría un error respecto a la real. Consideramos dos opciones para medir el nivel de representación de una función de los dos métodos:  $R$  cuadrado y el error relativo promedio.

### Error relativo promedio

$$\bar{E}_R = \frac{1}{n} \sum_{i=x_0}^{x_n} \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \quad (2.24)$$

Donde:

$y_i$  = Valor de la función en el punto  $i$ .

$\hat{y}_i$  = Valor de la función aproximada en el punto  $i$ .

$x_0$  = Limite inferior.

$x_n$  = Limite superior.

$n$  = numero de puntos entre  $x_0$  y  $x_n$ .

Este estimador del error nos dice en promedio cual es el error relativo en cada punto, es decir, en promedio que tan lejos está el valor de la función aproximada del real respecto al valor real en un punto. En las figuras 2.7 y 2.8 vamos a ver cómo se comporta el error relativo respecto a la representación gráfica de la función real y la aproximada, en la función  $\exp(2x)$ .

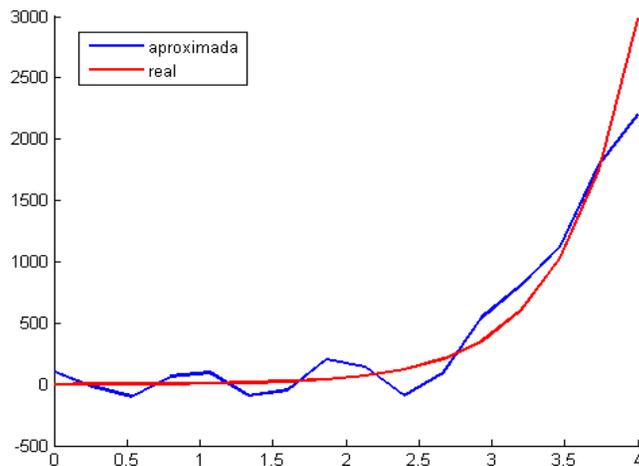


Figura 2.7: Error relativo = 12.12. Integrando por Simpson un tercio con 6 intervalos y realizando 8 sumas parciales

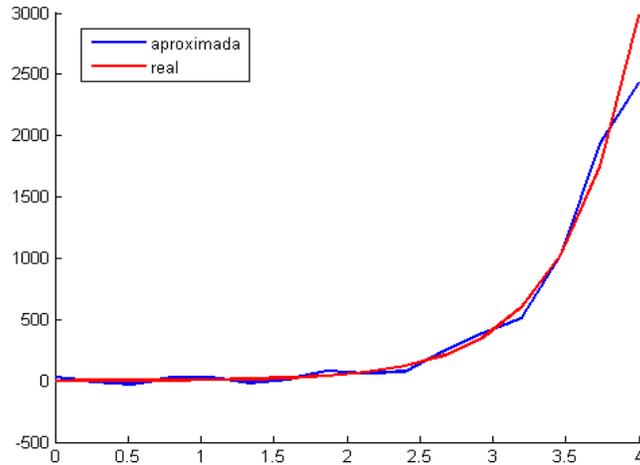


Figura 2.8: Error relativo = 3.424. Integrando por Simpson un tercio con 30 intervalos y realizando 8 sumas parciales

Como podemos ver en las figuras 2.7, 2.8 y en sus respectivos errores relativos, ambos concuerdan con lo cerca que esta la representación a la función por series de Fourier a la función real, es decir entre mayor es el grado de representación de la función el error relativo es menor. Como podemos ver el error relativo en este caso no tiene gran poder de interpretación.

### R cuadrado

Mide qué porcentaje de la variabilidad de la función real es explicada por la representación de la función. Este estimador está entre cero y uno.

$$R^2 = \frac{1}{n} \frac{SCE}{SCT} = \frac{1}{n} \sum_{i=x_0}^{x_n} \frac{(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{(y_i - \bar{y})^2} \quad (2.25)$$

Donde, *SCE*: Suma de cuadrados explicados.

*SCT*: Suma de cuadrados totales.

$y_i$  = Valor de la función en el punto  $i$ .

$\hat{y}_i$  = Valor de la función aproximada en el punto  $i$ .

$\bar{y}$  = Valor promedio de la función en un punto.

$x_0$  = Limite inferior.

$x_n$  = Limite superior.

$n$  = numero de puntos entre  $x_0$  y  $x_n$ .

Este concepto viene del área de estadística y es utilizado para observar en una regresión lineal que porcentaje de la variabilidad de los dato es explicada por los factores de la regresión. Esta idea también aplicaría para la representación de funciones, ya que lo que se está haciendo al representar la función, es una estimación de la función real. Ahora, le haremos un cambio a este estimador del grado de explicación que posee la función representada de la función real, puesto que en una regresión lineal se aproxima una función mediante una línea recta y ni series de Fourier, ni en la wavelet de Haar aproximan la función mediante una línea. R cuadrado ajustado

$$R^2 \times \text{punto}_i = \begin{cases} \frac{(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{(y_i - \bar{y})^2}, & \text{si } (y_i - \bar{y})^2 > (\hat{y}_i - \bar{y})^2; \\ \frac{(y_i - \bar{y})^2}{(\hat{y}_i - \bar{y})^2}, & \text{si } (y_i - \bar{y})^2 < (\hat{y}_i - \bar{y})^2. \end{cases} \quad (2.26)$$

$$R^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=x_0}^{x_n} R^2 \times \text{punto}_i \quad (2.27)$$

Este cambio lo realizamos para que el estimador siga estando de cero a uno, si no se hubiéramos hecho este cambio, el estimador podría pasarse de uno, ya que cuando la representación es muy mala, la diferencia entre la media de la función real y el valor de la función aproximada en un punto (*SCE*) puede ser mayor que la diferencia entre la media de la función real y el valor de la función real en un punto (*SCT*), lo que haría que el numerador fuera mayor que el denominador, por lo tanto el valor del estimador sería mayor que uno, lo cual no queremos, ya que el  $R$  cuadrado perdería poder de interpretación. En las figuras 2.7, 2.8 se puede observar cómo se comporta el  $R$  cuadrado respecto a la representación gráfica de la función real y la aproximada, en la función  $\exp(2x)$ .

Como podemos ver en las figuras 2.7, 2.8 y en sus  $R$  cuadrados 0.6311 y 0.7836 respectivamente, ambos concuerdan con lo cerca que está la representación a la función por series de Fourier a la función real.

Podemos ver que el  $R$  cuadrado tiene mayor poder de interpretación que el error relativo por el simple hecho de estar de cero a uno. Ahora el error en la representación de la función la podemos expresar como:

$$\text{Error} = 1 - R^2$$

Este error se podría interpretar como la variación que le falta o le sobra a la función aproximada para ser la función real.

## 2.7. Wavelets $q$ -deformadas

### 2.7.1. Sombrero Mexicano

Las distribuciones Gaussianas son ubicuitas en la naturaleza y están particularmente relacionadas a procesos de difusión normal. son obtenidas por la optimización de entropía de Boltzmann-Gibbs, sujeta a los vínculos de normalización y finitud de el segundo momento  $\langle x^2 \rangle$ . Tales como observo Levy, también son mas frecuentes en la naturaleza, pero no son descritas por el formalismo Boltzmann-Gibbs. Fue recientemente mostrado que su fundamentación reposa en la entropía no-extensiva y en el teorema del limite central Lévy-Gnedenko. Optimizando  $s_q$ , escrita en la version continua,

$$s_q[p_q(x)] = k \frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma} [\sigma p_q(x)]^q}{q - 1} \quad (2.28)$$

Con el vínculo de la normalización y la imposición de un valor finito para el  $q$ -valor esperado no normalizado de  $x^2$ ,

$$\langle x^2 \rangle_q \equiv \int x^2 [\sigma p_q(x)]^q dx = \sigma^2 \quad (2.29)$$

(Con esta definición, el concepto de valor esperado se torna en un caso particular,  $\langle x^2 \rangle_1$ ), tenemos

$$p_q(x) = \begin{cases} \left[ \frac{(1-q)\beta}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{1-q})}{\Gamma(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{2})} e_q^{-\beta x^2}, & 1 < q < 3, \\ \left[ \frac{(1-q)\beta}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{1-q} + \frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{1-q} + 1)} e_q^{-\beta x^2}, & \text{si } |x| < \sqrt{\frac{1}{(1-q)\beta}}, \quad q < 1. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.30)$$

$p_q(x)$  no es normalizable para  $q \geq 3$ . Esta ecuación  $p_q(x) \propto e_q^{-\beta x^2}$ , puede ser tomada como una  $q$ -Gaussiana, una vez que la distribución Gaussiana usual es recuperada cuando  $q \rightarrow 1$ . Além disso, para  $q = 2$ , se convierte en la distribución de Cauchy-Lorentz,  $q \rightarrow 3$ . genera una distribución completamente plana, y para  $q \rightarrow \infty$ , esta genera la delta Dirac. La  $q$ -Gaussiana unifica una gran variedad de diferentes distribuciones en una única familia parametrizada por  $q$ .

Para generalizar el sombrero mexicano, la idea mas natural que se viene a la mente es tomar la segunda derivada de una  $q$ -Gaussiana. En vez de hacer esto vamos a usar

$$\psi_q(x) \propto \frac{d^2[e_q^{-\beta x^2}]^{2-q}}{dx^2}, \quad (2.31)$$

Porque esta opción presenta un comportamiento mas conveniente. De fato, tomar la segunda derivada de  $e_q^{-\beta x^2}$  son formalmente equivalentes-renombrando convenientemente los parámetros  $\beta$  y  $q$ , podemos pasar de una a otra. encontramos la expresión para el  $q$ -sombrero mexicano:

$$\psi_q(x) = \begin{cases} A_q [1 - (3-q) - \beta x^2] [e_q^{-\beta x^2}]^q, & 1 < q < 3, \\ A_q [1 - (3-q) - \beta x^2] [e_q^{-\beta x^2}]^q, & \text{si } |x| < \sqrt{\frac{1}{(1-q)\beta}}, \quad -1 < q < 1. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Para  $q \leq -1$ ,  $\psi(x)$  no es normalizable, y para  $q \gg 3$ , esto no es admisible. La constante de normalización esta dado por

$$A_q = \begin{cases} \frac{\beta^{1/4}}{\pi^{1/4}\sqrt{3}} \left[ \frac{(q-1)^{5/2}\Gamma(\frac{2q}{q-1})}{\Gamma(\frac{2q}{q-1})} \right]^{1/2}, & 1 < q < 3, \\ \frac{\beta^{1/4}}{\pi^{1/4}\sqrt{3}} \frac{(5-q)^{1/2}(3+q)^{1/2}}{2} \left[ \frac{(1-q)^{1/2}\Gamma(\frac{2q}{1-q} + \frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{2q}{1-q} + 1)} \right]^{1/2}, & -1 < q < 1, \end{cases} \quad (2.33)$$

$\psi_q(x)$  satisface la condición de admisibilidad para una Wavelet, y consistentemente recupera el sombrero mexicano,  $\lim_{q \rightarrow 1} \psi(x) = \psi_1(x)$ . El rango de valores admisibles para  $q$ , ( $-1 < q < 3$ ), es dividida en tres regiones. Para  $-1 < q < 3$ ,  $\psi_q(x)$  tiene soporte infinito y presenta una cola del tipo ley de potencia  $\sim -1/|x|^{2/(q-1)}$  que es un contraste marcado con la cola exponencial de le sombrero mexicano original. Cuando  $q < 1$ ,  $\psi_q(x)$  presenta un corte en  $|x_c| = [(1-q)\beta]^{1/2}$ . En el rango  $0 < q < 1$ ,  $\psi_q(x_c) = 0$ , y cuando  $-1 < q < 0$ ,  $\psi_q(x)$  diverge. Para  $q \rightarrow -1$ ,  $\psi_q(x)$  con  $\beta = 1/2$ . La transformada de Fourier, definida por

$$\mathcal{F}[f(x); y] \equiv F(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e_1^{izy} f(x) dx, \quad (2.34)$$

donde  $\psi(x)$  puede ser encontrada considerando la ecuación 2.31, teniendo en cuenta la propiedad de la transformada de Fourier para derivadas,  $\mathcal{F}[f^{(n)}; y] = (-iy)^n F(y)$ , junto con la transformada de Fourier de una  $q$ -Gaussiana. Encontramos

$$\mathcal{F}[f^{(n)}; y] = \begin{cases} \frac{A_q}{(2-q)\beta} \frac{1}{\sqrt{2(q-1)\beta}\Gamma(\frac{2-q}{q-1})} y^2 \left[ \frac{|y|}{2\sqrt{(q-1)\beta}} \right]^\nu K_\nu \left( \frac{|y|}{\sqrt{(q-1)\beta}} \right), & 1 < q < 3, \\ \frac{A_q}{2(2-q)\beta} \frac{\Gamma(\frac{2-q}{1-q}+1)}{\sqrt{2(1-q)\beta}} y^2 \left[ \frac{2\sqrt{(q-1)\beta}}{y} \right]^{-\nu} J_{-\nu} \left( \frac{y}{\sqrt{(1-q)\beta}} \right), & -1 < q < 1, \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\text{con } \nu = \frac{2-q}{q-1} - \frac{1}{2}.$$

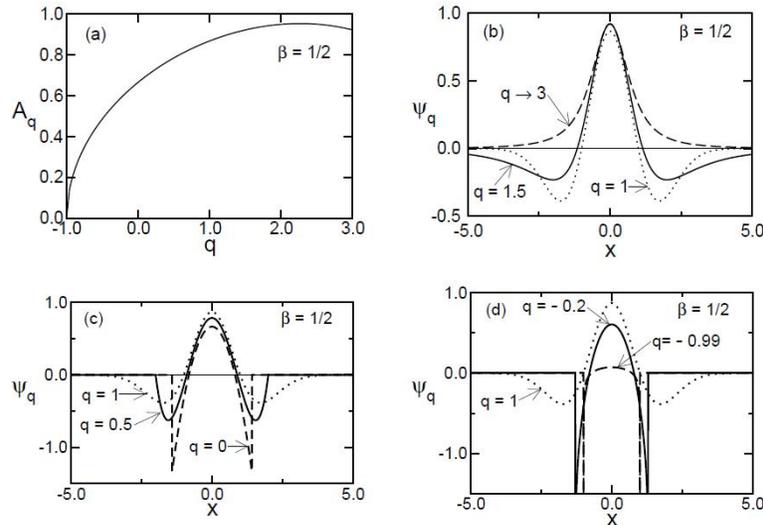


Figura 2.9:  $q$ -sombrero mexicano con  $\beta = 1/2$ . (a) Constante de normalización  $A_q$ ; (b)  $\psi_q(x)$  para  $1 < q < 3$ ; (c)  $0 < q < 1$ ; (d)  $-1 < q < 0$ . El sombrero mexicano usual ( $q = 1$ ) es representado por la línea punteada para efecto de comparación.

Es posible tener variaciones del sombrero mexicano usando  $\beta = \beta(q)$  (con  $\beta(1) = 1/2$ ), por ejemplo  $\beta = 1/(3 - q)$ . La figura 2.10 ilustra esta posibilidad (usando la notación  $\psi_q^*$ , para diferenciarlo de el caso representado por la figura 2.9). Notemos que cuando  $q < 1$  el comportamiento de ambos  $\psi_q$  y  $\psi_q^*$  son similares; entre tanto, para  $q > 1$ , el comportamiento de ambas son significativamente diferentes, en consecuencia da divergencia y da constante de normalización para el caso  $\beta = 1/(3 - q)$ .

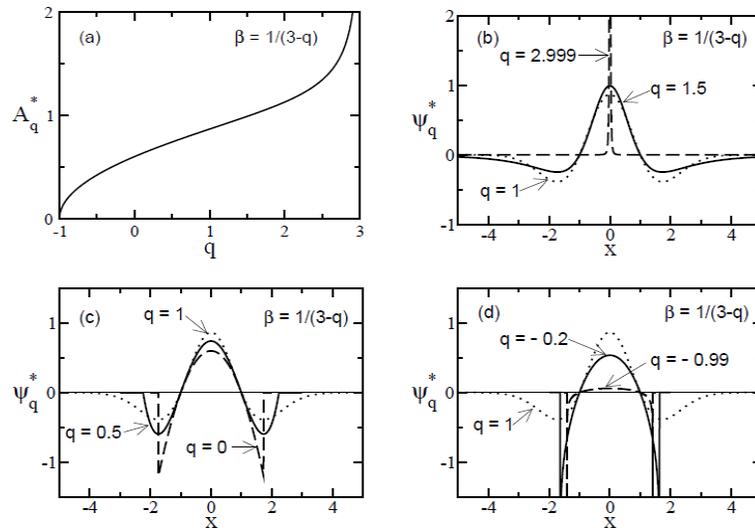


Figura 2.10:  $q$ -sombrero mexicano con  $\beta = 1/(3-q)$ . (a) Constante de normalización  $A_q^*$ ; (b)  $\psi_q^*(x)$  para  $1 < q < 3$ ; (c)  $0 < q < 1$ ; (d)  $-1 < q < 0$ . El sombrero mexicano usual ( $q = 1$ ) es representado por la línea punteada para efecto de comparación.

## Capítulo 3

# Aplicaciones de las $q$ -deformadas

### 3.1. Parejas sexuales

Recientemente fue divulgado un estudio sobre el comportamiento sexual de un grupo aleatorio de suecos a lo largo de un año. El objetivo era revelar la estructura de red del contacto sexual. El tamaño de la población la cual fue sometida al examen constaba de 4781 suecos (edades comprendidas entre 18 y 74 años) y la tasa de respuesta del cuestionario fue del 59% que corresponde a 2810 respuestas. La Figura 3.1 muestra la distribución acumulada de la cantidad de diferentes parejas reportados en los últimos 12 meses anteriores a la encuesta. Los autores identifican una ley de potencia para los comportamientos tanto femeninos como Masculino, observando que el número de parejas denunciado por mujeres es menor que el denunciado por los hombres. Tratándose Por lo tanto de un fenómeno libre de rango, los autores llamaron la atención sobre la diferencia de las redes de amigos, que tiene un patrón exponencial o gaussiana, por tanto presentando así un conjunto rango típico definido. En particular, este último trabajo al que nos referimos, los autores identifican tres tipos de redes (i) las pequeñas redes del mundo (mundo pequeño): redes libres de escala (redes sin escala), con la de la del tipo cola de la ley de energía, (ii) la escala de las redes de libre truncado (escala truncado libre redes), que prevé un régimen de tipo intermedio de la ley de energía, seguido de una transición a una cola exponencial y (iii) con la escala de las redes (redes de escala única), que tienen una exponencial de la cola o de Gauss. Las redes de amistad son identificados como el tipo (III), mientras que la red de contactos sexuales, del tipo (i). Autores consideran que la escala de las redes libres (de tipo (i)) están relacionados con el modelo de unión preferencial de Barabási-Albert[224, 225]. Podemos especular aquí que un tipo (i) de redes de mundo pequeño puede ser adecuadamente descrito con  $q$ -exponenciales (o eventualmente  $q$ -Gaussiana); el tipo (ii) con  $(q,1)$ -exponencial (o su equivalente Gaussiana) y finalmente, el tipo (iii) por Gaussianas. La Figura 3.1 también representa curvas, calculadas con una  $q$ -exponencial, en la ecuación 3.1, con  $\gamma = 1$  y la normalización considerando el caso discreto,  $P(\geq 1) = 1$ , El ajuste es bastante bueno en toda la gama de datos y no solo en la cola.

$$p(x) \propto \exp_q(-\beta_q |x|^\gamma) \tag{3.1}$$

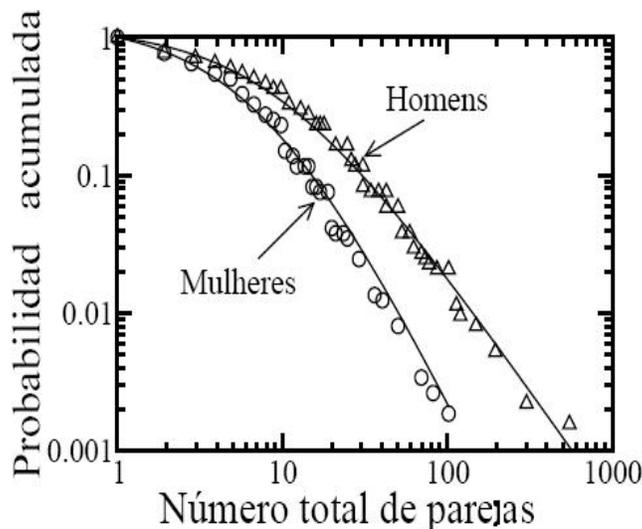


Figura 3.1: Probabilidad acumulada inversa de diferentes parejas suecas a lo largo de un año. Los círculos corresponden a las mujeres y los triángulos a los hombres. Las líneas continuas son  $q$ -exponenciales, ajustadas para el caso discreto, es decir,  $P(1) = 1$ . Los parámetros para las mujeres son  $q_F = 1.4$ ,  $1/\beta_{q_F} = 3.33$ , y para los hombres,  $q_M = 1.58$ ,  $1/\beta_{q_F} = 5.55$

### 3.2. Producto Interno Bruto (PIB)

Particularmente estamos interesados en métodos de la mecánica estadística no-extensiva y sus aplicaciones en economía. el primer trabajo que se esta haciendo es la conexión entre mercados financieros y turbulencia, dentro de un formalismo no-extensivo.

Una caracterización de sistemas económicos, mas específicamente distribuciones de rendimientos personales (en inglés, personal income, abreviaremos por PI), usualmente es asumida siguiendo la ley de Pareto, analizando distribuciones de renta y riqueza de poblaciones, concluir que la probabilidad  $p(x)dx$  de un individuo tiene un rendimiento comprendido entre  $x$  y  $x + dx$  obedece a  $p(x) \propto \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ , siendo  $1 \leq \alpha \leq 2$  ( $p(x)$  es una densidad de probabilidad). Cuando mas socializada la economía, mayor valor de  $\alpha$ . Es común ver la distribución de Pareto representada por la distribución acumulada inversa,

$$P(\geq x) = \int_x^\infty p(y)dy = \frac{1}{x^\alpha} \quad (3.2)$$

donde  $(P \geq x)$  es la probabilidad de un individuo en tener un rendimiento igual o superior a  $x$ , en una region de altos ingresos es una distribución log-normal,  $(p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\log^2(x/x_0)}{2\sigma^2}\right])$ , siendo  $x_0$  la medio y  $\sigma$  la desviación normal. Tratándose como una distribución de dos parámetros), en una region de ingresos intermedia.

Nuestra contribución consiste en analizar un aspecto un poco diferente dos sistemas económicos: la distribución de ingreso personal total (PI) de las ciudades, como también el producto interno bruto (PIB) de estas ciudades para un país dado. Ambos ingreso personal total y el producto interno total, pueden ser indexados como valor agregado. Similarmente, consideramos una distribución PIB de países del mundo. Utilizamos distribuciones pertenecientes a familias de

funciones q-exponenciales, particularmente vamos a considerar q-exponenciales (o variantes) del tipo  $\exp_q(-x)$ , con  $q \geq 1$  y  $x > 0$ , este caso muestra una disminución de la cola del tipo de ley de energía, que es una que nos va a interesar. Siguiendo esa línea veremos que, en algunos casos, somos capaces de describir casi la totalidad del espectro de las distribuciones, y no solo colas con única función. Esto apunta a una visión unificada del problema (en vez de considerar una ley para la región de altos ingresos y otra ley distinta para la región de ingresos intermedios). De una cierta manera este problema se asemeja a otro, el número de citación de artículos científicos, que también presenta apenas una cola del tipo ley de energía. En un principio se conjeturo que diferentes fenómenos gobiernan los artículos más citados y los pocos citados (vide Ref. [195] y los que las contienen). Una abordaje no-extensivo del problema [196] mostró que es posible tener una única función capaz de describir todo el espectro de citaciones (volvemos a este ejemplo en la Sub-sección 8.4.5). Vamos a considerar que con  $p \equiv P$ , siendo  $P$  la distribución de probabilidad acumulada inversa,  $x = x/x_0$  la razón entre una variable económica y su valor mínimo.

En el caso discreto  $x_i \equiv x_i/x_{min}$ , donde  $x$  es una variable económica, en nuestro análisis, PI de una ciudad o el PIB de una ciudad(o país) y el índice  $min$  es la ciudad (país) más pobre(más bajo no ranking).

Analizamos un caso de distribución de PI: ciudades de Estados Unidos, para los años entre 1970 y 2000 [262]. Analizamos también tres tipos de distribución de PIB: ciudades Brasileñas (de 1970 a 1996)[263], ciudades Alemanas (de 1992 a 1998)[265] y ciudades del Reino Unido (RU) (de 1993 a 1998) [265]. Todos los casos son razonablemente bien descritos con  $\gamma = 2$ , es decir,  $(q, q')$ -Gaussianas.

La Figura 3.2 ilustra los resultados con las distribuciones inversas acumuladas (o un rank, algunas veces traducido al portugués como posto), obtenidas por el producto de  $P$  el número de ciudades. Son representadas por tres curvas en cada Fig.3.2 de (a)– (d): (i) distribución q-Gaussiana, que describe los datos de las regiones de bajos ingresos, (ii)  $(q, q')$ -Gaussiana, que se muestra capaz de reproducir la región baja y intermedia, incluyendo *joelho* ( $x_{q'} * *$ ) y (iii) distribución log-normal, que fue ajustada para la región intermedia. Observamos que para los EEUU y Brasil, la  $(q, q')$ -Gaussiana describe los datos en prácticamente toda la fase de variación del espectro. Ya para Alemania y Reino Unido, ambas curvas  $(q, q')$ -Gaussiana y log-normal respectivamente son capaces de describir los datos en la región baja y intermedia (las curvas son prácticamente indistinguibles visualmente en esta región). Para los EEUU y Brasil, la curva log-normal fracasa en región de bajos ingresos, lo que puede ser mejor percibido con detalles en la Fig.3.2(a) y Fig.3.2(b). Los valores de los parámetros utilizados son presentados en la Tabla.2.1

Pais	Año	$N_{ciudades}$	$q$	$q'$	$1/\sqrt{\beta_q}$	$1/\sqrt{\beta'_q}$	$x_0$	$\sigma$
EEUU	2000	3110	3.80	1.7	87.71	2236.07	110	7
Brasil	1996	4973	3.50	2.1	40.82	816.50	22	10
Alemania	1998	440	2.70	1.5	3.16	6.59	3.5	1.5
RU	1996	133	3.12	1.4	18.26	37.80	20	1.5

Cuadro 3.1: Parámetros para las funciones de distribución, para los años representados en la Fig.3.2

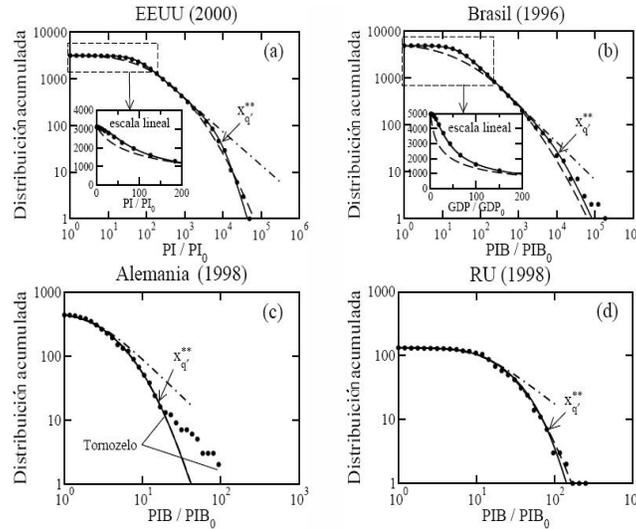


Figura 3.2: Distribución acumulada inversa *para*  $PI/PI_0$  (EEUU) y  $PIB/PIB_0$  (Brasil, Alemania y Reino Unido). Son representadas tres distribuciones para la comparación: (i)  $q$ -Gaussiana (con  $\beta'_q = 0$ ) (línea discontinua-punteada), (ii)  $(q, q')$ -Gaussiana (línea continua), y (iii) log-normal (línea discontinua). Las Figuras (a) y (b) representan detalles con escala lineal-lineal, para tornar mas evidente la cualidad de los ajustes en la region de bajo ingreso. En las Figuras (c) y (d), Las curvas  $(q, q')$ -Gaussiana y log-normal están superpuestas y son indistinguibles visualmente. Son indicadas las posiciones de las transiciones  $x_{q'}^{**}$  (joelho, dado por la Eq. (8.33)). El regimen tornozelo es prácticamente pronunciado en (c), aunque también puede estar presente en otros casos.

Regiones de PIB grande muestran un comportamiento diferente: la distribución presenta una transición adicional, inclinándose para arriba y originando un tercer regimen en la ley de potencia. Este efecto es bastante pronunciado para Alemania, y en un grado menor para Reino Unido. Para los EEUU y Brasil, este efecto esta prácticamente escondido el la distribución histogramada, conforme a la Fig.3.2 es mas visible en los gráficos no histogramados. Por ejemplo, en los EEUU, apenas los dos mejores ciudades (en términos del PIB)(que son los Angeles y gran parte de Chicago) pertenecen a este regimen. En Brasil tenemos a San Paulo y Rio de Janeiro dentro de este regimen. Esta característica es común en varios sistemas, algunas veces denominado *King effect*. También esta presente en ríos cósmicos altamente energéticos siendo señalado en este entorno por tornozelo(ankle)(esta notación se adopto en las figuras). Este comportamiento posiblemente esta ligado a fenómenos de no equilibrio y también lo es fuera de este enfoque. Otra posibilidad de explicar que es la estadística de los pobres(reducido numero de puntos).Llamamos la atención sobre el hecho de que el número de ciudades en los EE.UU. y Brasil es de un orden de magnitud mayor que el número de Alemania y el Reino Unido. La Fig.3.3 representa la evolución temporal del parámetro  $q$ . Los EEUU tienen un crecimiento aproximadamente uniforme de  $q$  a lo largo de 30 años. En el caso de Brasil la tendencia de crecimiento entre 1970 hasta 1990 fue quebrada de 1990 a 1996. En Alemania y Reino Unido presentan valores constantes para  $q$  en los periodos para los cual es tenemos datos disponibles. El crecimiento del parámetro  $q$  (observados para los EEUU y Brasil) indica un crecimiento de la desigualdad: si  $q$  es mayor, mas extensa es la cola, por tanto mayor la probabilidad de encontrar ciudades mas ricas que otras. El parámetro  $q'$ (para un determinado país) se mostró constante para los años observados. Los valores menores de  $q$  y  $q'$  para Alemania y Reino Unido, en comparación con los valores de los EEUU y Brasil, refleja una distribución de el valor agregado mas balanceada para estos países europeos en relación

a los países americanos analizados. La relación entre las inclinaciones (asociadas a los valores de  $q$ ) es la igualdad/desigualdad no es una conclusión nueva; es conocida desde Pareto. Analizamos también la distribución de los PIB's de los países del mundo, para el año 2000. En este caso observamos que la función  $(q, q')$ -exponencial (con  $\gamma = 1$  en la ecuación 3.3) ajusta a los datos mejor que la función  $(q, q')$ -Gaussiana (con  $\gamma = 2$ ) en la región de ingresos bajos e intermedios.

$$\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \frac{dp}{dx} = -(\beta_q - \beta_{q'})p^q - \beta_{q'}p^{q'} \quad (1 \leq q' \leq q, 0 \leq \beta_{q'} \ll \beta_q). \quad (3.3)$$

y esta dada por la siguiente función inversa:

$$x^\gamma = \frac{1}{\beta_{q'}} \left\{ \frac{p^{-(q'-1)} - 1}{q' - 1} - \frac{(\beta_q/\beta_{q'}) - 1}{1 + q - 2q'} \times [H(1; q-2q', q-q', (\beta_q/\beta_{q'})-1) - H(p; q-2q', q-q', (\beta_q/\beta_{q'})-1)] \right\}, \quad (3.4)$$

siendo

$$H(p; a, b, c) = q^{1+a} F\left(\frac{1+a}{b}, 1; \frac{1+a+b}{c}; -p^b c\right), \quad (3.5)$$

y  $F$  la función hipergeométrica. Esta distribución (la inversa de 3.4) consistentemente merece ser denominada  $(q, q')$ -exponencial aumentada, y es una generalización de todos los casos anteriores. Es especie de superposición entre dos  $q$ -exponenciales, con valores distintos del índice entrópico  $q$ .

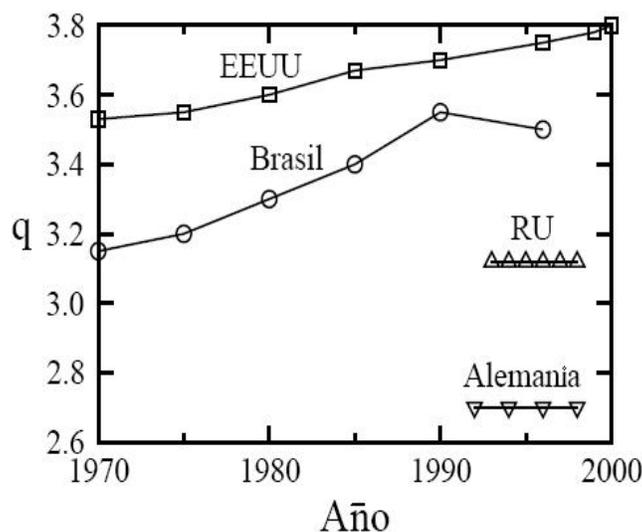


Figura 3.3: Evolución de los parámetros  $q$  para los EEUU (cuadros), Brasil (círculos) y Alemania (triángulos invertidos). Los parámetros  $q'$  (para cada país) son constantes para todos los años:  $q'_{Brasil} = 2.1$ ,  $q'_{EEUU} = 1.7$ ,  $q'_{Alemania} = 1.5$  y  $q'_{RU} = 1.4$ . Las líneas son solo guías para los ojos.

Aunque la diferencia entre las dos funciones ( $\gamma = 1$  y  $\gamma = 2$ ) es notable, no es tan grande, por lo que esta observación puramente terminológica merece más investigación, por lo que los resultados pueden ser corroborados o no. Puede alguien confirmar que una posible interpretación

para  $\gamma = 1$ , podría ser debido a la naturaleza de las interacciones entre los países, que se imaginan ser diferentes de las que existen entre las ciudades dentro de un país. La Fig.3.4 muestra los resultados. El *King effect* también está presente aquí, particularmente para los dos países de mayor PIB, EEUU y Japón.

### 3.3. Distribuciones Geográficas

En esta sección se mostrara ejemplos de distribuciones relacionadas con distribuciones geográficas. Específicamente se abordara áreas de ciudades (ejemplificados con ciudades Brasileñas) y precios de las tierras negociadas en Japón.

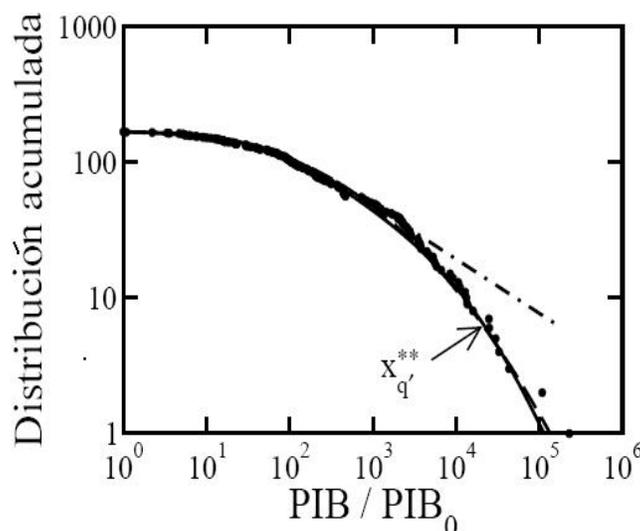


Figura 3.4: Distribución acumulada inversa de  $PIB/PIB_0$  de 167 países para el año 2000 (los datos son histogramados: cada punto corresponde a un país). Los datos fueron ajustados a una  $(q, q')$ -exponencial (línea continua) y la distribución log-normal (línea discontinua) ambas curvas no se distinguen visualmente en este ejemplo. La  $q$ -exponencial (con  $\beta_{q'} = 0$ , línea discontinua-punteada) también es presentada, para comparación. Los valores de los parámetros son  $q = 3.5$ ,  $q' = 1.7$ ,  $1/\beta_q = 111.1$  y  $1/\beta_{q'} = 2500.0$ . O joelho de acuerdo con la ecuación 3.6, y localizado en  $PIB/PIB_0 = 19665$ . La curva log-normal es obtenida con  $x_0 = 220$  y  $\sigma = 13$

$$x_{q'}^{**\gamma} = \frac{[(q-1)\beta_q]^{\frac{q'-1}{q-q'}}}{[(q'-1)\beta_{q'}]^{\frac{q-1}{q-q'}}} \quad (3.6)$$

**Áreas de la ciudades** Consideremos el área de todas las ciudades Brasileñas del año 1998. La menor de ellas es Santa Cruz de Minas (MG), tiene  $2,9 \text{ Km}^2$ , en cuanto a mayor área, Altamira (PA), tiene  $161446 \text{ Km}^2$ . Tratándose de una variación significativa. Solo para tener una idea comparativa, Altamira es mas grande que doce ciudades Brasileñas; es un poco mayor que Acre y un poco menor que Paraná. Mas grande también que países como Australia, Portugal, Grecia, Bulgaria. Son muchas las causas que llevan a una ciudad a tener cierta área, incluyendo dentro de otros factores geográficos, políticos, demográficos, económicos. A pesar de esta complejidad de influencias, es interesante observar que una única curva, la  $(q, q')$ -Gaussiana (dada por la solución

de la ecuación 3.3 con  $\gamma = 2$ ), se ajusta bastante bien prácticamente en todos los municipios Brasileños (5507 ciudades en el año 1998), desde la mas pequeña de ellas hasta la más grande. La Fig.3.5 ilustra los resultados.

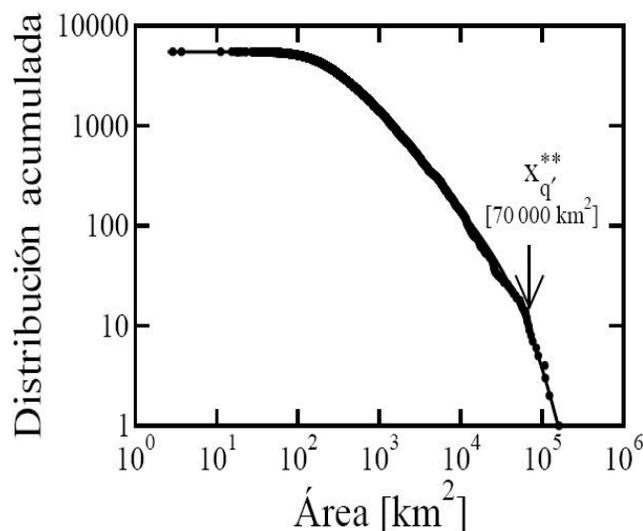


Figura 3.5: Distribución acumulada inversa de áreas de las ciudades Brasileñas (datos no histogramados). La línea continua es una  $(q, q')$ -Gaussiana con  $q = 3.07$ ,  $q' = 1.56$ ,  $1/\sqrt{\beta_q} = 353.55 \text{ Km}^2$ ,  $1/\sqrt{\beta_{q'}} = 11226.7 \text{ Km}^2$ .

### Precios de tierras en Japón

El problema de los precios de las tierras en Japón fue recientemente considerado en [270]. El autor encontró un a cola en la ley de energía para la distribución acumulada de precios de las tierras, con una inclinación de  $-1.7(P(X \geq x) \propto x^{-1.7})$ . La Fig.3.6 evidencia que una  $q$ -Gaussiana (ecuación 3.1, con  $\gamma = 2$ ) ajusta la gama completa de datos, excepto el último punto correspondiente a los puntos mas altos. Llamamos la atención que la distribución de la probabilidades de [70] esta histogramada. Talvez con los datos originales ( un total de 30600 puntos) es posible hacer el ajuste de la curva a este punto final(o a los puntos finales de la cola)a través de la ecuación con transición para una cola exponencial, (ecuaciones 3.7 y 3.8), y entonces a través de la ecuación con transición para un segundo regimen en la ley de energía, (ecuaciones 3.3 y 3.4)

$$\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \frac{dp}{dx} = -(\beta_q - \beta_1)p^q - \beta_1 p \quad (q \geq 1, 0 \leq \beta_1 \ll \beta_q). \quad (3.7)$$

Esta es una forma de la ecuación de Bernoulli con  $p(x) = \beta_1$  y  $g(x) = -(\beta_q - \beta_1)$ .

$$p(x) = \left[ 1 - \frac{\beta_q}{\beta_1} + \frac{\beta_q}{\beta_1} e^{(q-1)\beta_1 x^\gamma} \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.8)$$

Esta podemos adecuadamente denominarla  $(q, 1)$ -exponencial aumentada. Es inmediato verificar que  $q = 1$ , o  $\beta_q = 0$  la reduce a el caso usual de las exponenciales aumentadas, donde el método variacional origina formas exponenciales,

$$p(x) \propto \exp(-\beta |x|^\gamma), \quad (3.9)$$

Siendo  $\beta$  el multiplicador de Lagrange.  $\gamma = 1$  origina las funciones exponenciales usuales,  $\gamma = 2$  origina las Gaussianas. Para valores de  $\gamma$  arbitrarios, tenemos las exponenciales aumentadas. Ahora: las distribuciones exponenciales aumentadas obedecen a la siguiente ecuación

$$\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \frac{dp}{dx} = -\beta p. \quad (3.10)$$

Una manera bastante fácil de generalizar esta ecuación es

$$\frac{1}{\gamma x^{\gamma-1}} \frac{dp}{dx} = -\beta_q p^q \quad (q \geq 1), \quad (3.11)$$

cuya solución es  $p(x) \propto \exp_q(-\beta_q x^\gamma)$ .

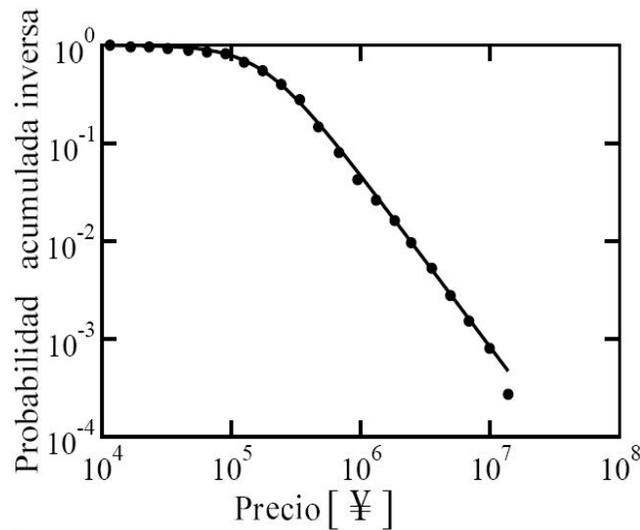


Figura 3.6: Distribución acumulada inversa de los precios de las tierras en Japón, para el año 1998. La línea continua es un  $q$ -Gaussiana con  $q = 2.136$ , que corresponde a la pendiente  $-1.76$ , y  $1/\sqrt{\beta_q} = 188982$  Yen.

# Conclusiones

Los métodos de representación de funciones son muy sensibles a pequeños cambios de los valores en los cálculos que utilizan en su definición, por ejemplo, variaciones en los cálculos de las integrales afectan considerablemente el nivel de significancia de representación de la función, por eso al utilizar métodos numéricos para realizar estos cálculos hay que tener mucho cuidado, ya que si no se realiza una buena aproximación de estos cálculos la representación de la función será deficiente. El  $R$  cuadrado es una buena estimación de la cercanía de dos funciones, por lo tanto es una medida que hay que tener en cuenta al momento de representar funciones por medio de cualquier método.

# Bibliografía

- [1] Olarte, Tomas, Tamayo Juan Pablo: *Compresión de imágenes en escala de grises mediante el uso de las Wavelets*. Trabajo análisis numérico, universidad EAFIT. Medellin (2006)
- [2] Nieto Natalia, Orozco Diana.: *El uso de la transformada wavelet discreta en la reconstrucción de señales sinusoidales*. Journal of inequalities in pure and applied Mathematics., Vol. 5., Article 102, (2004). pp., 1-15.
- [3] R. de Castro, M. López, J. Martínez, H. Díaz, M. Martínez.: *Introducción a la Transformada Wavelet para Ingenieros: un enfoque didáctico*. 2do Congreso Internacional en Innovación y Desarrollo Tecnológico CIINDET (2004.)
- [4] Pinheiro, E.: *Manifestações dinâmicas e termodinâmicas de sistemas não-extensivos*. Tese de Dutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro (2004)
- [5] Yves, Nievergelt.: *Wavelets Made Easy*. Birkhäuser Boston (1999)
- [6] Gilbert Strang, Truong Nguyen.: *Wavelets and filters banks*. Wellesley-camridge press (1997)
- [7] Walter Cova, Rodolfo Caballero.: *Sobre Wavelets E Imágenes*. Universidad Tecnológica Nacional Noviembre (2006)
- [8] Richard L. Burden, J. Douglas Faires.: *Análisis Numérico*. Math learning septima edición(2002)